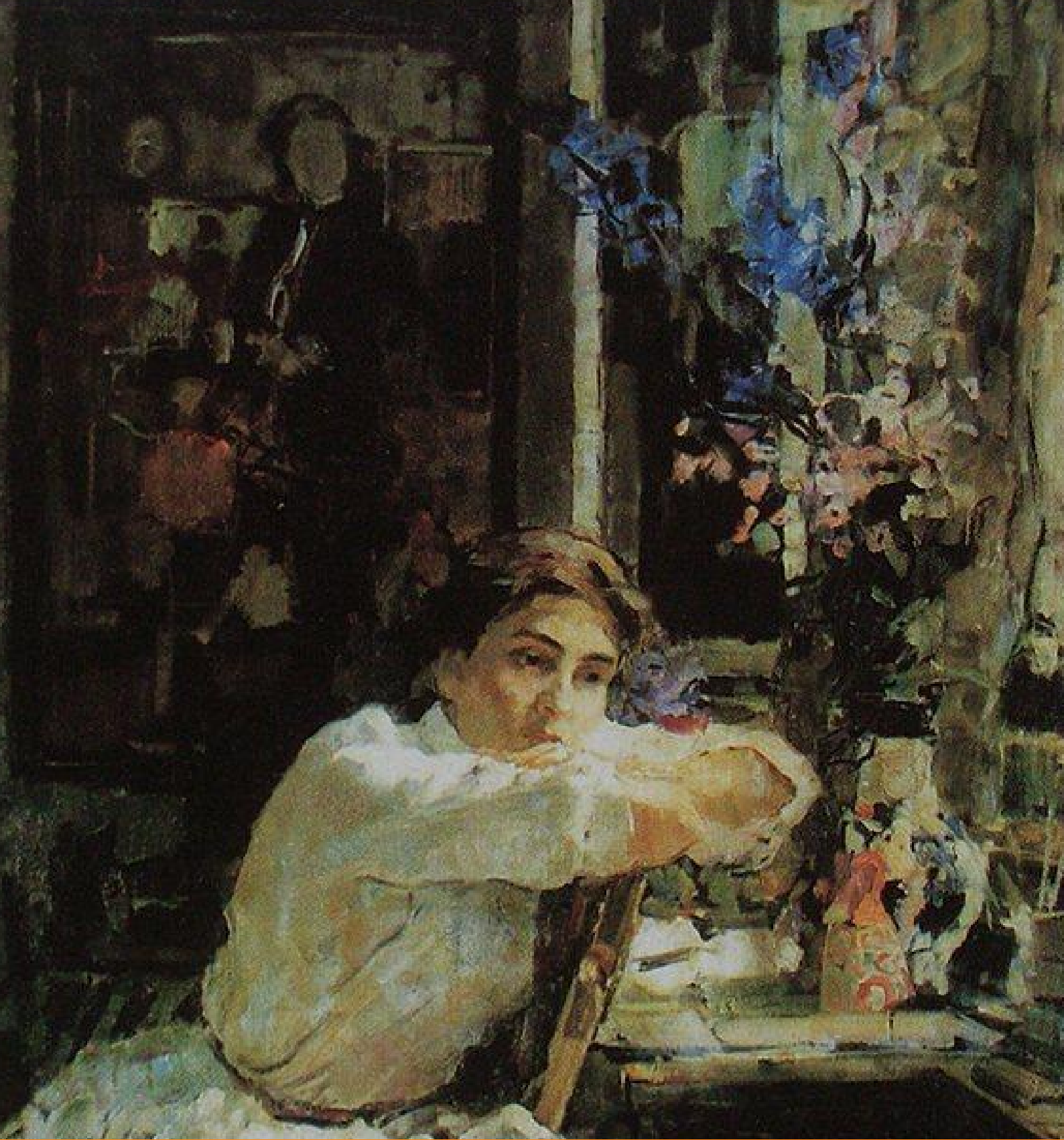




概率论与随机过程讲义

时间：2026 年 10 月

版本：1.0

从测度论概率到马尔可夫链、布朗运动与随机分析。

目录

前言	E
第一部分 概率论基础	1
第 1 章 测度论预备	2
1.1 可测空间与单调类定理	2
1.2 作为工具的标准结论	3
1.3 像测度与带密度的测度	4
1.4 实直线上的测度与分布函数	5
1.5 度量空间上的有限测度	5
1.6 有界变差函数	6
第 2 章 概率空间、随机变量与分布	7
2.1 概率空间与随机变量	7
2.2 数学期望	7
2.3 随机变量生成的 σ -代数	8
2.4 特征函数	9
2.5 Laplace 变换与母函数	10
第 3 章 独立性	11
3.1 独立的 σ -代数与随机变量	11
3.2 Borel–Cantelli 引理与 0-1 律	12
3.3 独立序列的构造	12
3.4 独立和	13
3.5 高斯向量	14
3.6 Poisson 过程	14
第 4 章 随机变量的收敛与极限定理	15
4.1 收敛方式	15
4.2 一致可积性	15
4.3 强大数定律	16
4.4 依分布收敛	17
4.5 中心极限定理	18
4.6 经验分布的收敛	20
第 5 章 条件期望	21
5.1 离散条件化	21
5.2 定义与存在性	21
5.3 条件期望的性质	22
5.4 条件期望的计算	23
5.5 转移核与条件分布	23

第二部分 离散时间随机过程	25
第 6 章 离散时间鞅	26
6.1 定义与例子	26
6.2 停时与可选停止	27
6.3 最大不等式与几乎必然收敛	27
6.4 L^p 有界的鞅	28
6.5 一致可积鞅与可选停止	29
6.6 反向鞅	30
6.7 若干应用	30
第 7 章 可数状态空间上的马尔可夫链	33
7.1 转移矩阵与马氏链	33
7.2 典范马氏链与马氏性	34
7.3 状态的分类	34
7.4 不变测度	36
7.5 遍历定理与收敛到平衡	37
7.6 鞅与调和函数	39
7.7 随机游走	40
第 8 章 马氏链的位势理论与边界理论	42
8.1 暂留链的位势	42
8.2 吸收链与有限链的基本矩阵	43
8.3 常返链的位势: Poisson 方程	44
8.4 Doob 的 h -变换	44
8.5 Martin 边界	45
8.6 可逆链与电网络	48
8.7 马尔可夫随机场	49
第三部分 布朗运动与随机分析	51
第 9 章 高斯过程与布朗运动	52
9.1 高斯空间与高斯过程	52
9.2 高斯白噪声	52
9.3 前布朗运动	53
9.4 路径的连续性与布朗运动的构造	53
9.5 路径性质	55
9.6 强马氏性与反射原理	55
9.7 更多的路径性质	57
第 10 章 滤子与连续时间鞅	59
10.1 滤子与过程	59
10.2 停时	59
10.3 连续时间鞅	60
10.4 连续时间的可选停止定理	61
10.5 Skorokhod 嵌入与 Donsker 不变原理	62

第 11 章 连续半鞅	64
11.1 有限变差过程	64
11.2 连续局部鞅	64
11.3 二次变差	65
11.4 两个局部鞅的括号	66
11.5 连续半鞅	67
第 12 章 随机积分与 Itô 公式	68
12.1 关于 L^2 有界鞅的随机积分	68
12.2 关于局部鞅与半鞅的随机积分	69
12.3 Itô 公式	70
12.4 Lévy 刻画与 Dambis–Dubins–Schwarz 定理	71
12.5 Burkholder–Davis–Gundy 不等式	72
12.6 布朗滤子中的鞅表示	73
12.7 Girsanov 定理	74
第 13 章 马尔可夫过程的一般理论	76
13.1 转移半群与马氏过程	76
13.2 Feller 半群与生成元	77
13.3 路径的正则性	78
13.4 强马氏性	79
13.5 三类重要的 Feller 过程	79
第 14 章 布朗运动与偏微分方程	82
14.1 热方程	82
14.2 球面上的均匀分布	82
14.3 调和函数	83
14.4 Dirichlet 问题	84
14.5 Poisson 核	84
14.6 常返性与暂留性	85
14.7 Green 函数、Liouville 定理与半平面的离出分布	86
14.8 平面布朗运动与共形不变性	86
第 15 章 随机微分方程	88
15.1 定义	88
15.2 Lipschitz 情形	88
15.3 解的马氏性	90
15.4 一维情形的路径唯一性	90
15.5 例子	91
15.6 一维扩散的尺度函数	91
15.7 弱解与 Girsanov 变换	92
第 16 章 局部时	94
16.1 Tanaka 公式	94
16.2 局部时的正则性与占位时公式	95
16.3 布朗运动的局部时	96
16.4 应用: Lévy 的反正弦律	97

16.5 Tanaka 的随机微分方程	98
文献说明	99
参考文献	100

前言

这份讲义面向已经学过初等概率论与测度论基本知识 (σ -代数、测度、Lebesgue 积分与三大收敛定理、 L^p 空间、Fubini 定理) 的高年级本科生。它的目标是用尽量短的路径, 把读者带进下面三本书的核心内容:

- J.-F. Le Gall, 《Measure Theory, Probability, and Stochastic Processes》(GTM 295) [12]: 测度论概率、独立性、极限定理、条件期望、离散鞅、可数状态马氏链与布朗运动;
- J. G. Kemeny, J. L. Snell, A. W. Knapp, 《Denumerable Markov Chains》(GTM 40) [10]: 可数马氏链的位势理论、边界理论以及 (D. Griffeath 撰写的) 马尔可夫随机场;
- J.-F. Le Gall, 《Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus》(GTM 274) [11]: 高斯过程、布朗运动、连续鞅、随机积分、Feller 过程、布朗运动与偏微分方程、随机微分方程与局部时。

测度论与积分的基础部分另参考了 M. Capiński, E. Kopp, 《Measure, Integral and Probability》[2]。除了上述书中的正文内容外, 讲义还吸收了这些书习题与注记中的许多重要结论 (例如 Hewitt–Savage 0-1 律、Kakutani 定理、de Finetti 定理、重对数律、反正弦律、Feynman–Kac 公式、电网络方法、Skorokhod 嵌入与 Donsker 不变原理、Spitzer 定理), 并给出完整证明。

讲义分为三部分。第一部分 (第 1–5 章) 是概率论的测度论基础: 我们先把将要用到的测度论工具集中整理 (第 1 章), 然后依次讨论随机变量与分布、独立性、收敛与极限定理、条件期望。第二部分 (第 6–8 章) 是离散时间随机过程: 离散鞅、可数状态马氏链以及马氏链的位势理论与 Martin 边界。第三部分 (第 9–16 章) 是连续时间理论: 布朗运动、连续时间鞅、连续半鞅、随机积分与 Itô 公式、一般马氏过程、布朗运动与偏微分方程、随机微分方程以及局部时。

讲义力求自洽: 除第 1 章开头明确列出的、测度论课程中的标准结论 (以及少量标准的分析学事实, 届时会明确指出) 外, 正文中用到的每一个结论都在讲义中给出了证明, 并且后文只引用前文已经证明的结论。极少数不影响主线的结论 (例如 Martin 表示的唯一性、Hille–Yosida 定理的存在性部分、Lévy–Khintchine 公式、Kallianpur–Robbins 定律、一般的 Yamada–Watanabe 定理) 仅作为注记陈述, 正文不依赖它们, 这一点会在相应位置标明。

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ 。 $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$, $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$ 。“可数”包括有限。 1_A 表示集合 A 的示性函数。若无特别说明, 随机变量都定义在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上; $\mathbb{E}$ 表示关于 $\mathbb{P}$ 的期望。“a.s.”是“几乎必然”(almost surely) 的缩写。 $\mathcal{B}(E)$ 表示拓扑空间 E 的 Borel σ -代数。 $\xrightarrow{\text{a.s.}}$ 、 $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ 、 $\xrightarrow{(d)}$ 分别表示几乎必然收敛、依概率收敛与依分布收敛, $\stackrel{(d)}{=}$ 表示同分布。

第一部分应线性阅读。第二部分中第 6 章是后面一切的基础; 第 7 与 8 章对应 GTM 295 第 13 章与 GTM 40 的主要内容。第三部分应按顺序阅读, 它基本对应 GTM 274 的全部内容以及 GTM 295 第 14 章。

讲义没有习题; 读者可以使用上述各书中的习题作为练习。讲义末尾列出了所有参考文献, 包括在个别证明中借鉴的其他文献。

第一部分

概率论基础

第 1 章 测度论预备

本章整理全讲义所用的测度论工具。第 1.2 节列出我们直接引用的、测度论课程中的标准结论；其余各节中的结论（单调类定理、像测度、Radon–Nikodym 定理、直线上的测度、度量空间上测度的正则性等）都给出证明，因为它们概率论中以特别的方式被反复使用。

1.1 可测空间与单调类定理

定义 1.1 (σ -代数与可测映射)

设 E 为集合。 E 的子集族 $\mathcal{A}$ 称为 σ -代数，如果 $E \in \mathcal{A}$ ， $\mathcal{A}$ 对取补集封闭，且对可数并封闭。 $(E, \mathcal{A})$ 称为可测空间。对任意子集族 $\mathcal{C}$ ，包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ -代数（所有包含 $\mathcal{C}$ 的 σ -代数之交）记为 $\sigma(\mathcal{C})$ ，称为 $\mathcal{C}$ 生成的 σ -代数。拓扑空间 E 的开集生成的 σ -代数称为 Borel σ -代数，记为 $\mathcal{B}(E)$ 。
映射 $f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ 称为可测的，若对一切 $B \in \mathcal{B}$ 有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ 。

引理 1.2

若 $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ ，则 $f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ 可测当且仅当对一切 $C \in \mathcal{C}$ 有 $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ 。特别地，拓扑空间之间的连续映射关于 Borel σ -代数可测； $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 可测当且仅当对一切 $a \in \mathbb{R}$ ， $\{f \leq a\} \in \mathcal{A}$ 。

证明 $\{B \subset F: f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ 是 σ -代数（原像与集合运算可交换），且包含 $\mathcal{C}$ ，从而包含 $\sigma(\mathcal{C})$ 。其余两个论断是因为开集生成 $\mathcal{B}(F)$ ，以及 $\{(-\infty, a]: a \in \mathbb{R}\}$ 生成 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ （每个开区间都是这种集合经可数次集合运算得到的）。

定义 1.3 (乘积 σ -代数)

设 $(E_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ 是一族可测空间（ I 任意）。 $\prod_i E_i$ 上的乘积 σ -代数 $\bigotimes_i \mathcal{A}_i$ 是使所有坐标投影 π_i 可测的最小 σ -代数，即由形如 $\pi_i^{-1}(A_i)$ （ $i \in I, A_i \in \mathcal{A}_i$ ）的集合生成。

由引理 1.2，映射 $f = (f_i)_{i \in I}: (G, \mathcal{G}) \rightarrow \prod_i E_i$ 可测当且仅当每个分量 f_i 可测。

引理 1.4

若 $E_1, E_2, \dots$ 是可分度量空间，则 $\mathcal{B}(\prod_n E_n) = \bigotimes_n \mathcal{B}(E_n)$ （对有限或可数乘积，乘积空间取乘积拓扑，它是可分可度量化了的）。特别地 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$ ；若 X, Y 为实值可测函数，则 (X, Y) 关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 可测，从而 $X + Y, XY, X \vee Y$ 等都可测。

证明 投影连续，故 $\bigotimes_n \mathcal{B}(E_n) \subset \mathcal{B}(\prod E_n)$ 。反之，取 E_n 的可数稠密子集 D_n ，以 D_n 中的点为中心、有理半径的开球构成 E_n 的可数拓扑基 $\mathcal{U}_n$ 。乘积拓扑有可数基：形如 $\pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(U_k)$ （ $U_j \in \mathcal{U}_j$ ）的集合，它们都属于 $\bigotimes \mathcal{B}(E_n)$ 。乘积空间中每个开集是这种基元的可数并，故属于 $\bigotimes \mathcal{B}(E_n)$ 。

定义 1.5 (π -系与 λ -系)

E 的子集族 $\mathcal{C}$ 称为 π -系，若它对有限交封闭。 $\mathcal{M}$ 称为 λ -系（或单调类、Dynkin 系），若：(i) $E \in \mathcal{M}$ ；(ii) 若 $A, B \in \mathcal{M}$ 且 $A \subset B$ ，则 $B \setminus A \in \mathcal{M}$ ；(iii) 若 $A_n \in \mathcal{M}$ ， $A_n \uparrow A$ ，则 $A \in \mathcal{M}$ 。

定理 1.6 (Dynkin π - λ 定理)

若 $\mathcal{C}$ 是 π -系，则包含 $\mathcal{C}$ 的最小 λ -系 $\lambda(\mathcal{C})$ 等于 $\sigma(\mathcal{C})$ 。因此，任何包含 $\mathcal{C}$ 的 λ -系都包含 $\sigma(\mathcal{C})$ 。

证明 σ -代数都是 λ -系，故 $\lambda(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ 。反之，只需证 $\mathcal{M} := \lambda(\mathcal{C})$ 对有限交封闭：一个对有限交封闭的 λ -系是 σ -代数（对补集封闭由 (i)(ii) 得出； $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ ；可数并是有限并的递增极限）。

第一步：对 $A \in \mathcal{C}$ ，令 $\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M}\}$ 。容易验证 $\mathcal{M}_A$ 是 λ -系（例如若 $B \subset B'$ 都属于 $\mathcal{M}_A$ ，则 $A \cap (B' \setminus B) = (A \cap B') \setminus (A \cap B) \in \mathcal{M}$ ），并且由于 $\mathcal{C}$ 是 π -系， $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_A$ 。故 $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$ 。这说明：对 $A \in \mathcal{C}$ ， $B \in \mathcal{M}$ ，有 $A \cap B \in \mathcal{M}$ 。

第二步：对 $B \in \mathcal{M}$ ，令 $\mathcal{M}'_B = \{A \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M}\}$ 。同理它是 λ -系，由第一步它包含 $\mathcal{C}$ ，故等于 $\mathcal{M}$ 。于是 $\mathcal{M}$ 对有限交封闭。

推论 1.7 (测度的唯一性)

设 μ, ν 是 $(E, \mathcal{A})$ 上的两个有限测度， $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 是 π -系且 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ 。若 $\mu(E) = \nu(E)$ 且 μ, ν 在 $\mathcal{C}$ 上相等，则 $\mu = \nu$ 。若 μ, ν 只是 σ -有限的，但存在 $E_n \in \mathcal{C}$ ， $E_n \uparrow E$ ， $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$ ，结论仍成立。

证明 $\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的 λ -系 (ii) 用到测度有限)，由定理 1.6 它等于 $\mathcal{A}$ 。第二个论断：对每个 n 把第一部分用于 $\mu(\cdot \cap E_n)$ 与 $\nu(\cdot \cap E_n)$ ($\{C \cap E_n : C \in \mathcal{C}\} \cup \{E_n\}$ 仍是 π -系)，再令 $n \rightarrow \infty$ 。

定理 1.8 (函数形式的单调类定理)

设 $\mathcal{H}$ 是 E 上一族有界实函数构成的向量空间，满足：(i) 常数函数 $1 \in \mathcal{H}$ ；(ii) 若 $f_n \in \mathcal{H}$ ， $0 \leq f_n \uparrow f$ 且 f 有界，则 $f \in \mathcal{H}$ 。若 $\mathcal{C}$ 是 π -系且对一切 $C \in \mathcal{C}$ 有 $1_C \in \mathcal{H}$ ，则 $\mathcal{H}$ 包含一切有界 $\sigma(\mathcal{C})$ -可测函数。

证明 $\{A : 1_A \in \mathcal{H}\}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的 λ -系，故包含 $\sigma(\mathcal{C})$ 。于是 $\mathcal{H}$ 包含 $\sigma(\mathcal{C})$ -可测简单函数。一个非负有界可测函数 f 是非负简单函数 $f_n = \sum_{k \geq 0} k 2^{-n} 1_{\{k 2^{-n} \leq f < (k+1) 2^{-n}\}} \wedge n$ 的递增极限，故属于 $\mathcal{H}$ ；一般有界 f 写成 $f = f^+ - f^-$ 。

1.2 作为工具的标准结论

以下结论是测度论课程的标准内容，我们不加证明地使用。 $(E, \mathcal{A}, \mu)$ 表示测度空间。

1. (Lebesgue 测度与外测度延拓) 存在 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上唯一的测度 λ_d ，使得每个长方体的测度等于其体积。它是平移不变的，且对可逆线性映射 T 有 $\lambda_d \circ T^{-1} = |\det T|^{-1} \lambda_d$ 。更一般地 (Carathéodory 延拓定理)：若 $\mathcal{C}$ 是 E 上的集代数 (包含 E ，对补与有限并封闭)， $\mu_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ 有限可加、 $\mu_0(E) = 1$ ，且在 $\mathcal{C}$ 上可数可加 (等价地：若 $C_n \in \mathcal{C}$ ， $C_n \downarrow \emptyset$ ，则 $\mu_0(C_n) \rightarrow 0$)，则 μ_0 可延拓为 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的概率测度 (延拓唯一由推论 1.7 保证)。
2. (积分的收敛定理) 单调收敛定理、Fatou 引理、控制收敛定理；以及由它们推出的：若 $\sum_n \int |f_n| d\mu < \infty$ ，则 $\int \sum f_n d\mu = \sum \int f_n d\mu$ ；在控制条件下可以在积分号下对参数求极限与求导。
3. (L^p 空间) Hölder 不等式、Minkowski 不等式； $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) 是 Banach 空间，且 L^p 中收敛的序列有几乎处处收敛的子列； L^2 是 Hilbert 空间，对 L^2 的闭子空间 H 存在正交投影 Π_H ， $\Pi_H f$ 是 H 中到 f 距离最小的唯一元素，并由“ $\Pi_H f \in H$ 且 $f - \Pi_H f \perp H$ ”刻画。
4. (乘积测度与 Fubini 定理) 若 μ, ν 为 σ -有限测度，则 $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ 上存在唯一测度 $\mu \otimes \nu$ 使 $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ ；对非负可测函数 (Tonelli) 或 $\mu \otimes \nu$ -可积函数 (Fubini)，截口函数可测、累次积分有意义且等于二重积分。有限个 σ -有限测度的乘积同理，且满足结合律； $\lambda_d = \lambda_1^{\otimes d}$ 。
5. (变量替换) 若 $\varphi : U \rightarrow V$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中开集之间的 C^1 微分同胚，则对非负可测 f ，

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| dx.$$

6. (分析学事实) 紧度量空间上的连续函数一致连续；Weierstrass 逼近定理 ($[0, 1]$ 上的连续函数可由多项式一致逼近)；Hilbert 空间上有界线性泛函的 Riesz 表示定理 (它是正交投影存在性的直接推论)；Banach 空间中的基本事实；复变函数中的 Cauchy-Riemann 方程与全纯函数的基本性质 (只在第 14 章用到)；光滑截断函数的存在性 (对紧集 $K \subset U$ 开集，存在 $\chi \in C_c^\infty(U)$ ， $0 \leq \chi \leq 1$ ， $\chi = 1$ 于 K)；从 $[0, \infty)$ 到 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的连续函数有连续的对数分支。

1.3 像测度与带密度的测度

定义 1.9 (像测度)

设 $f: (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ 可测, μ 为 $(E, \mathcal{A})$ 上的测度. $f_{\#}\mu(B) := \mu(f^{-1}(B))$ 定义了 $(F, \mathcal{B})$ 上的测度, 称为 μ 在 f 下的像测度 (或前推测度), 也记为 $\mu \circ f^{-1}$.



命题 1.10 (转移公式)

对一切非负可测 $g: F \rightarrow [0, \infty]$,

$$\int_F g d(f_{\#}\mu) = \int_E g \circ f d\mu.$$

对实值可测 g , $g \in L^1(f_{\#}\mu)$ 当且仅当 $g \circ f \in L^1(\mu)$, 此时等式仍成立.



证明 $g = \mathbf{1}_B$ 时就是像测度的定义; 由线性性对非负简单函数成立; 由单调收敛定理 (用递增的简单函数逼近) 对非负可测函数成立; 最后对 $g^{\pm}$ 分别应用.

定义 1.11 (密度)

设 $h \geq 0$ 可测. $\nu(A) = \int_A h d\mu$ 定义一个测度, 记为 $\nu = h \cdot \mu$, h 称为 ν 关于 μ 的密度. 此时 $\int g d\nu = \int gh d\mu$ (证明同命题 1.10). 若 $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, 称 ν 关于 μ 绝对连续, 记作 $\nu \ll \mu$.



定理 1.12 (Radon–Nikodym)

设 μ, ν 是 $(E, \mathcal{A})$ 上的 σ -有限测度, $\nu \ll \mu$. 则存在可测函数 $h: E \rightarrow [0, \infty)$ 使 $\nu = h \cdot \mu$, 且 h 在 μ -a.e. 意义下唯一. h 记为 $\frac{d\nu}{d\mu}$.



证明 唯一性: 若 $h \cdot \mu = h' \cdot \mu$ 为 σ -有限测度, 取 $E_n \uparrow E$ 使 $\nu(E_n) < \infty$, 对 $A = E_n \cap \{h > h'\}$ 有 $\int_A (h - h') d\mu = 0$, 故 $\mu(A) = 0$; 对称地得 $h = h'$ a.e.

存在性, 有限情形. 设 μ, ν 有限 (von Neumann 的证明). 令 $\rho = \mu + \nu$. 线性泛函 $\Phi(g) = \int g d\nu$ 在 $L^2(\rho)$ 上有定义且有界: $|\Phi(g)| \leq \int |g| d\rho \leq \rho(E)^{1/2} \|g\|_{L^2(\rho)}$. 由 Riesz 表示定理 (对闭子空间正交投影的直接推论), 存在 $k \in L^2(\rho)$ 使

$$\int g d\nu = \int g k d\rho \quad \forall g \in L^2(\rho). \quad (1.1)$$

取 $g = \mathbf{1}_{\{k < 0\}}$ 与 $g = \mathbf{1}_{\{k > 1\}}$ 可知 $0 \leq k \leq 1$ ρ -a.e.; 修改 k 使之处处在 $[0, 1]$ 中. (1.1) 改写为 $\int g(1-k) d\nu = \int g k d\mu$, 由单调收敛定理它对一切非负可测 g 成立. 取 $g = \mathbf{1}_{\{k=1\}}$ 得 $\mu(k=1) = 0$, 从而 $\nu(k=1) = 0$. 对 $A \in \mathcal{A}$ 取 $g = \mathbf{1}_{A \cap \{k < 1\}}(1 + k + \cdots + k^n)$, 得

$$\int_{A \cap \{k < 1\}} (1 - k^{n+1}) d\nu = \int_{A \cap \{k < 1\}} k(1 + \cdots + k^n) d\mu.$$

令 $n \rightarrow \infty$ (单调收敛), 并利用 $\nu(k=1) = 0$, 得 $\nu(A) = \int_A h d\mu$, 其中 $h = \frac{k}{1-k} \mathbf{1}_{\{k < 1\}}$.

σ -有限情形: 取不交可测分划 $E = \bigcup_n E_n$ 使 $\mu(E_n), \nu(E_n) < \infty$, 在每个 E_n 上应用有限情形再拼起来. h 可能取 $+\infty$ 的集合是 μ -零集 (因为 ν 是 σ -有限的), 在其上令 $h = 0$ 即可.

1.4 实直线上的测度与分布函数

定理 1.13

设 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 单调不减且右连续。则存在 $\mathbb{R}$ 上唯一的 Borel 测度 μ_F 使对一切 $a < b$ 有 $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ 。特别地, 若 F 还满足 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$, 则 μ_F 是概率测度且 $\mu_F((-\infty, x]) = F(x)$ 。♥

证明 存在性。令 $\ell = \inf F \in [-\infty, \infty), L = \sup F \in (-\infty, \infty]$ 。对 $u \in I := (\ell, L)$ 定义广义逆

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\} \in \mathbb{R}.$$

由 F 不减且右连续, $\{x : F(x) \geq u\}$ 是形如 $[G(u), \infty)$ 的闭区间, 故对 $u \in I, x \in \mathbb{R}$:

$$G(u) \leq x \iff u \leq F(x). \quad (1.2)$$

特别地 G 不减, 从而 Borel 可测。令 μ_F 为 Lebesgue 测度在 I 上的限制在 G 下的像测度。由 (1.2), $\mu_F((a, b]) = \lambda_1(\{u \in I : F(a) < u \leq F(b)\}) = F(b) - F(a)$ 。

唯一性。半开区间 $(a, b]$ 连同 $\emptyset$ 构成 π -系, 生成 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 且 $(-n, n] \uparrow \mathbb{R}$ 的测度有限, 由推论 1.7 即得。

注 这个证明说明: 只要有了 $(0, 1)$ 上的 Lebesgue 测度, 就能“造出”直线上一切概率测度——用一个均匀分布的随机变量 U 构造 $G(U)$ 。这是第 3 章构造独立随机变量序列的基础。

对于有限区间上的不减右连续函数 $F: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, 同样得到 $[0, t]$ 上的测度 dF , 满足 $dF((a, b]) = F(b) - F(a)$, $dF(\{0\}) = 0$ (延拓 F 为在 $(-\infty, 0)$ 上取值 $F(0)$ 、在 (t, ∞) 上取值 $F(t)$ 即可)。

1.5 度量空间上的有限测度

命题 1.14 (正则性)

设 μ 为度量空间 (E, d) 上的有限 Borel 测度。则对一切 $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subset A, F \text{ 闭}\} = \inf\{\mu(U) : U \supset A, U \text{ 开}\}.$$

因此两个有限 Borel 测度若对一切有界 Lipschitz 函数 f 有 $\int f d\mu = \int f d\nu$, 则二者相等。♠

证明 令 $\mathcal{R}$ 为满足上述两个等式的 A 全体。闭集 $F \in \mathcal{R}$: 外逼近取 $U_n = \{x : d(x, F) < 1/n\} \downarrow F$ 。 $\mathcal{R}$ 对补集封闭 (闭集与开集互换)。若 $A_n \in \mathcal{R}, A = \bigcup A_n$, 给定 $\varepsilon > 0$, 取闭集 $F_n \subset A_n \subset U_n$ 开集, 使 $\mu(U_n \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n}$ 。则 $U = \bigcup U_n \supset A$ 开, $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$; 再取 N 使 $\mu(A \setminus \bigcup_{n \leq N} F_n) < 2\varepsilon$, 而 $\bigcup_{n \leq N} F_n$ 是闭集。故 $\mathcal{R}$ 是包含所有闭集的 σ -代数, 等于 $\mathcal{B}(E)$ 。

对第二个论断, 闭集 F 的示性函数是有界 Lipschitz 函数 $f_n(x) = (1 - n d(x, F))^+$ 的递减极限, 由控制收敛 $\mu(F) = \nu(F)$; 再由正则性 (或推论 1.7, 闭集构成 π -系) 得 $\mu = \nu$ 。

定理 1.15 (Ulam)

设 E 是 Polish 空间 (可分且可完备度量化), μ 为 E 上的有限 Borel 测度。则对一切 $A \in \mathcal{B}(E)$, $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ 紧}\}$ 。♥

证明 先证 μ 是胎紧的: 对 $\varepsilon > 0$ 存在紧集 K 使 $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$ 。取完备度量 d 与稠密序列 (x_i) 。对每个 k , $\bigcup_i \bar{B}(x_i, 1/k) = E$, 故存在 n_k 使 $\mu(E \setminus \bigcup_{i \leq n_k} \bar{B}(x_i, 1/k)) < \varepsilon 2^{-k}$ 。令 $K = \bigcap_k \bigcup_{i \leq n_k} \bar{B}(x_i, 1/k)$, 它闭且完全有界, 在完备空间中是紧的, 且 $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$ 。对一般的 A , 由命题 1.14 取闭集 $F \subset A$ 使 $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$, 则 $F \cap K$ 紧且 $\mu(A \setminus (F \cap K)) < 2\varepsilon$ 。

1.6 有界变差函数

在随机积分理论（第 11 章）中我们需要关于有界变差函数的 Stieltjes 积分。

定义 1.16

函数 $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 称为有界变差的，若

$$V_a(T) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^p |a(t_i) - a(t_{i-1})| : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T \right\} < \infty.$$

$a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 称为有界变差的，若它在每个 $[0, T]$ 上有界变差。



命题 1.17

设 $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且有界变差， $a(0) = 0$ 。则 $t \mapsto V_a(t)$ 连续不减， $a = a_1 - a_2$ ，其中 $a_1 = \frac{1}{2}(V_a + a)$ ， $a_2 = \frac{1}{2}(V_a - a)$ 连续不减。于是存在 $[0, T]$ 上唯一的有限符号测度 $\mu_a = da_1 - da_2$ 使 $\mu_a([0, t]) = a(t)$ ；且 $|\mu_a| := dV_a = da_1 + da_2$ 满足 $|\int f d\mu_a| \leq \int |f| dV_a$ 。对 $f \in L^1(dV_a)$ 记 $\int_0^t f(s) da(s) := \int_{[0, t]} f d\mu_a$ 。



证明 V_a 不减与可加性 $V_a(t) = V_a(s) + V_a^{[s, t]}([s, t] \text{ 上的全变差})$ 直接由定义得到， $V_a \pm a$ 不减是因为 $|a(t) - a(s)| \leq V_a(t) - V_a(s)$ 。只需证 V_a 连续。固定 $s \in [0, T]$ 与 $\varepsilon > 0$ 。由 a 的一致连续性取 $\delta > 0$ 使 $|u - v| < \delta \Rightarrow |a(u) - a(v)| < \varepsilon$ 。取 $[s, T]$ 的分割 $s = t_0 < \cdots < t_p = T$ ，使 $\sum |a(t_i) - a(t_{i-1})| > V_a^{[s, T]} - \varepsilon$ ，并可设 $t_1 - t_0 < \delta$ （加细只增大和）。于是对 $u \in (s, t_1]$ ，

$$V_a^{[s, T]} - \varepsilon < |a(t_1) - a(s)| + V_a^{[t_1, T]} < \varepsilon + V_a^{[u, T]},$$

即 $V_a(u) - V_a(s) = V_a^{[s, u]} < 2\varepsilon$ 。这证明了右连续性；左连续性对称。 μ_a 的存在由定理 1.13，唯一性由推论 1.7。不等式 $|\int f d\mu_a| \leq \int |f| dV_a$ 由 $|\int f da_1 - \int f da_2| \leq \int |f| d(a_1 + a_2)$ 得到。

注 可以证明 dV_a 恰好是符号测度 μ_a 的全变差测度，但我们只需要上面的不等式：凡是只用到“ $|\int f da| \leq \int |f| dV_a$ ”的论证都不需要这个事实。

引理 1.18

若 a 如命题 1.17， $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续，则对任意分割 $0 = t_0^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ ，若网眼 $\max_i (t_i^n - t_{i-1}^n) \rightarrow 0$ ，则

$$\sum_i f(t_{i-1}^n) (a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)) \longrightarrow \int_0^t f(s) da(s).$$



证明 左边等于 $\int_{[0, t]} f_n d\mu_a$ ，其中 $f_n = \sum_i f(t_{i-1}^n) \mathbf{1}_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}$ ($\mu_a(\{0\}) = 0$)。由 f 的一致连续性， $f_n \rightarrow f$ 在 $(0, t]$ 上一致收敛，结论由 $|\int (f_n - f) d\mu_a| \leq \sup |f_n - f| \cdot V_a(t)$ 得出。

第2章 概率空间、随机变量与分布

从数学上看, 概率论“只是”总质量为1的测度论; 但概率论有自己的视角: 概率空间 Ω 通常是背景性的、不被明确写出的, 真正重要的是随机变量的分布以及随机变量之间的关系 (独立性、条件化)。本章建立基本语言。

2.1 概率空间与随机变量

定义 2.1

概率空间是测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 其中 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ 。 $\mathcal{F}$ 中的元素称为事件。若事件 A 满足 $\mathbb{P}(A) = 1$, 称 A 几乎必然 (a.s.) 发生。

设 $(E, \mathcal{E})$ 为可测空间。可测映射 $X: \Omega \rightarrow E$ 称为取值于 E 的随机变量。 $E = \mathbb{R}$ (或 $\mathbb{R}^d$) 时称为实 (或 d 维) 随机变量, 总是配 Borel σ -代数。 X 的分布 (或律) 是像测度 $\mathbb{P}_X := X_{\#}\mathbb{P}$, 即 $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$ 。

我们约定把 $\{\omega: X(\omega) \in B\}$ 简写为 $\{X \in B\}$, $\mathbb{P}(\{X \in B\})$ 简写为 $\mathbb{P}(X \in B)$ 。

注 [典范构造] 给定 $(E, \mathcal{E})$ 上任一概率测度 μ , 总存在分布为 μ 的随机变量: 取 $\Omega = E$, $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, $\mathbb{P} = \mu$, $X = \text{id}$ 。困难的问题在于同时构造多个具有给定联合性质的随机变量, 这是第3章的主题。

若 E 可数, X 的分布由 $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ 决定: $\mathbb{P}_X = \sum_x p(x)\delta_x$ 。若 X 取值于 $\mathbb{R}^d$, 且 $\mathbb{P}_X$ 关于 Lebesgue 测度有密度 p , 即 $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B p(x)dx$, 称 p 为 X 的密度。

例 2.1 (经典分布)

1. Bernoulli 分布 $\mathcal{B}(p)$: $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$ 。二项分布 $\mathcal{B}(n, p)$: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$ 。
2. 几何分布 $\mathcal{G}(p)$ ($0 < p < 1$): $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)p^k$, $k \in \mathbb{N}$ 。
3. Poisson 分布 $\mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$): $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k \in \mathbb{N}$ 。
4. $[a, b]$ 上的均匀分布: 密度 $\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$ 。指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$: 密度 $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$ 。Gamma 分布 $\Gamma(a, \lambda)$ ($a, \lambda > 0$): 密度 $\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$ 。
5. 高斯 (正态) 分布 $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$): 密度 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$ 。约定 $\mathcal{N}(m, 0) = \delta_m$ 。
6. Cauchy 分布: 密度 $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 。

定义 2.2 (分布函数)

实随机变量 X 的分布函数是 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ 。

F_X 不减、右连续, $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$, 且 $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$ 。反过来, 由定理 1.13, 任何具有这些性质的函数都是唯一一个概率测度的分布函数, 因此分布函数决定分布。更具体地, 若 U 在 $(0, 1)$ 上均匀分布, G 是 F 的广义逆 (1.2), 则 $G(U)$ 的分布函数为 F 。

2.2 数学期望

定义 2.3

对实随机变量 $X \geq 0$ 或 $X \in L^1(\mathbb{P})$, 定义 $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$ 。对 $\mathbb{R}^d$ 值随机变量逐分量定义。

由命题 1.10, 对可测 $g: E \rightarrow [0, \infty]$,

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_E g(x) \mathbb{P}_X(dx). \quad (2.1)$$

特别地, 若 X 有密度 p , 则 $\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x)p(x)dx$; 若 X 离散, 则 $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x)$ 。

命题 2.4

设 X, Y 取值于 $(E, \mathcal{E})$ 。若对一切有界可测 (或一切非负可测) g 有 $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, 则 $X \stackrel{(d)}{=} Y$ 。若 E 是度量空间, 只需对一切有界 Lipschitz 函数 g 验证。

证明 取 $g = \mathbf{1}_B$; 第二个论断由命题 1.14。

例 2.2 (分布的计算) 设 X 在 $\mathbb{R}^d$ 的开集 U 上有密度 p , $\varphi: U \rightarrow V$ 为 C^1 微分同胚。则 $Y = \varphi(X)$ 有密度 $g(y) = p(\varphi^{-1}(y))|\det D\varphi^{-1}(y)|\mathbf{1}_V(y)$: 对非负可测 g , 由变量替换,

$$\mathbb{E}[g(Y)] = \int_U g(\varphi(x))p(x)dx = \int_V g(y)p(\varphi^{-1}(y))|\det D\varphi^{-1}(y)|dy.$$

命题 2.5 (基本不等式)

1. (Markov) 若 $X \geq 0$, $a > 0$, 则 $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}[X]/a$ 。
2. (Chebyshev) 若 $X \in L^2$, 则 $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \text{Var}(X)/a^2$, 其中 $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$ 。
3. (Jensen) 若 $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是开区间 I 上的凸函数, $X \in L^1$ 取值于 I , 则 $\mathbb{E}[\varphi(X)^-] < \infty$, 且 $\varphi(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$ 。
4. 若 $1 \leq q \leq p \leq \infty$, 则 $\|X\|_q \leq \|X\|_p$, 从而 $L^p \subset L^q$ 。

证明 (1) $a\mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$ 取期望。(2) 对 $(X - \mathbb{E}X)^2$ 用 (1)。

(3) 凸函数在每点 $x_0 \in I$ 有左右导数且 $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'_+(x_0)(x - x_0)$; 因此 φ 是可数个仿射函数 $\ell_n(x) = a_n x + b_n$ (取 x_0 遍历 $I \cap \mathbb{Q}$) 的上确界——若 $q_k \in I \cap \mathbb{Q}$, $q_k \rightarrow x$, 则 $\varphi'_+(q_k)$ 有界 (φ'_+ 单调, 在紧子区间上有界), 而 φ 连续, 故 $\varphi(q_k) + \varphi'_+(q_k)(x - q_k) \rightarrow \varphi(x)$, 即有理点处的支撑线的上确界在每点都等于 φ 。注意 $\mathbb{E}X \in I$ (若 $\mathbb{E}X$ 是 I 的端点, 则 X a.s. 等于该端点, 矛盾)。由 $\varphi(X) \geq \ell_1(X)$ 得 $\varphi(X)^- \leq |a_1|X + |b_1|$ 可积。对每个 n , $\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq a_n \mathbb{E}X + b_n$, 对 n 取上确界即得。

(4) 对 $p < \infty$, 把 (3) 用于凸函数 $x \mapsto x^{p/q}$ 与随机变量 $|X|^q$ (必要时先截断 $|X|^q \wedge n$ 再用单调收敛)。

定义 2.6 (协方差)

对 $X, Y \in L^2$, $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$ 。对 $\mathbb{R}^d$ 值 $X = (X_1, \dots, X_d)$ 且 $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$, 协方差矩阵 $K_X = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j}$ 。

K_X 对称半正定: $\langle \xi, K_X \xi \rangle = \text{Var}(\langle \xi, X \rangle) \geq 0$ 。

2.3 随机变量生成的 σ -代数

定义 2.7

随机变量 $X: \Omega \rightarrow (E, \mathcal{E})$ 生成的 σ -代数是 $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\}$ 。一族随机变量 $(X_i)_{i \in I}$ 生成的 σ -代数 $\sigma(X_i, i \in I)$ 是使所有 X_i 可测的最小 σ -代数。

$\sigma(X)$ 是使 X 可测的最小 σ -代数, 它表示“观察 X 所获得的信息”。下面的引理精确地说明了这一直观。

引理 2.8 (Doob-Dynkin)

设 $X: \Omega \rightarrow (E, \mathcal{E})$ 。实随机变量 Y 是 $\sigma(X)$ -可测的, 当且仅当存在可测 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 使 $Y = f(X)$ 。

证明 充分性显然。必要性: 若 $Y = \mathbf{1}_A$, $A \in \sigma(X)$, 则 $A = X^{-1}(B)$, 取 $f = \mathbf{1}_B$ 。由线性性对简单函数成立。若 $Y \geq 0$, 取 $\sigma(X)$ -可测简单函数 $Y_n \uparrow Y$, $Y_n = f_n(X)$, 令 $f = \limsup f_n \mathbf{1}_{\{\limsup f_n < \infty\}}$, 则 f 可测且

$f(X) = \lim f_n(X) = Y$ 。一般情形 $Y = Y^+ - Y^-$ 。

2.4 特征函数

定义 2.9

$\mathbb{R}^d$ 值随机变量 X 的特征函数为 $\Phi_X(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\langle \xi, X \rangle}] = \int e^{i\langle \xi, x \rangle} \mathbb{P}_X(dx)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ 。对 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度 μ 同样定义 $\hat{\mu}(\xi) = \int e^{i\langle \xi, x \rangle} \mu(dx)$ 。



Φ_X 只依赖于 $\mathbb{P}_X$, $|\Phi_X| \leq 1$, $\Phi_X(0) = 1$, $\Phi_X(-\xi) = \overline{\Phi_X(\xi)}$, 由控制收敛 Φ_X 一致连续 ($|\Phi_X(\xi+h) - \Phi_X(\xi)| \leq \mathbb{E}[|e^{i\langle h, X \rangle} - 1|] \rightarrow 0$)。对 $a \in \mathbb{R}^d$ 与 $d \times d$ 矩阵 A , $\Phi_{AX+a}(\xi) = e^{i\langle \xi, a \rangle} \Phi_X(A^\top \xi)$ 。

命题 2.10

若 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则 $\Phi_X(\xi) = e^{-\xi^2/2}$ 。因此 $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ 的特征函数是 $\exp(im\xi - \sigma^2\xi^2/2)$ 。



证明 $\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi x} e^{-x^2/2} dx$ 。由于 $|xe^{-x^2/2}|$ 可积, 可以在积分号下求导, 再分部积分:

$$\Phi'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int xe^{-x^2/2} e^{i\xi x} dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} i\xi e^{i\xi x} dx = -\xi \Phi(\xi).$$

又 $\Phi(0) = 1$, 故 $\Phi(\xi) = e^{-\xi^2/2}$ 。第二个论断由 $\sigma X + m \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ 得到。

定理 2.11 (特征函数决定分布)

若 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度 μ, ν 满足 $\hat{\mu} = \hat{\nu}$, 则 $\mu = \nu$ 。



证明 对 $\sigma > 0$ 令 $g_\sigma(x) = (2\pi\sigma^2)^{-d/2} \exp(-|x|^2/(2\sigma^2))$ 为 $\mathcal{N}(0, \sigma^2 I_d)$ 的密度。由命题 2.10 (逐坐标应用),

$$g_\sigma(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} e^{-\sigma^2|\xi|^2/2} \hat{\mu}(-\xi) d\xi.$$

于是由 Fubini 定理 (被积函数绝对可积),

$$\int g_\sigma(x-y) \mu(dy) = (2\pi)^{-d} \int e^{i\langle \xi, x \rangle} e^{-\sigma^2|\xi|^2/2} \hat{\mu}(-\xi) d\xi.$$

右边只依赖于 $\hat{\mu}$ 。故对一切 x , $f_\sigma(x) := \int g_\sigma(x-y) \mu(dy) = \int g_\sigma(x-y) \nu(dy)$ 。对有界连续 φ , 由 Fubini,

$$\int \varphi(x) f_\sigma(x) dx = \int \left(\int \varphi(y + \sigma z) g_1(z) dz \right) \mu(dy),$$

令 $\sigma \rightarrow 0$, 由控制收敛定理右边趋于 $\int \varphi d\mu$ 。同理对 ν 。故 $\int \varphi d\mu = \int \varphi d\nu$ 对一切有界连续 φ 成立, 由命题 1.14 得 $\mu = \nu$ 。

命题 2.12 (矩与导数)

设 X 为实随机变量, $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ 。则 Φ_X 是 C^n 的, $\Phi_X^{(k)}(\xi) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{i\xi X}]$ ($k \leq n$)。特别地, 若 $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, 则当 $\xi \rightarrow 0$ 时

$$\Phi_X(\xi) = 1 + i\xi \mathbb{E}[X] - \frac{1}{2}\xi^2 \mathbb{E}[X^2] + o(\xi^2).$$



证明 归纳地在积分号下求导: $|\partial_\xi^k e^{i\xi X}| = |X|^k$ 可积。第二个论断是 Taylor 公式。

对 d 维随机变量, 若 $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$, 同理有 $\Phi_X(\xi) = 1 + i\langle \xi, \mathbb{E}X \rangle - \frac{1}{2}\mathbb{E}[\langle \xi, X \rangle^2] + o(|\xi|^2)$ 。

2.5 Laplace 变换与母函数

定义 2.13

对取值于 $[0, \infty]$ 的随机变量 X , 其 Laplace 变换为 $L_X(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda X}]$, $\lambda > 0$ (约定 $e^{-\infty} = 0$)。对取值于 $\mathbb{N}$ 的随机变量, 其母函数为 $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_k \mathbb{P}(X = k)s^k$, $s \in [0, 1]$ 。



命题 2.14

(1) 母函数决定 $\mathbb{N}$ 值随机变量的分布。(2) 若 $[0, \infty]$ 值随机变量 X, Y 满足 $L_X(n) = L_Y(n)$ 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 则 $X \stackrel{(d)}{=} Y$ 。(3) 若 $g, h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 有界连续且 $\int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(t) dt$ 对一切 $\lambda \in \mathbb{N}^*$ 成立, 则 $g = h$ 。



证明 (1) 幂级数在 $[0, 1)$ 上决定其系数。(2) 令 $U = e^{-X}$, $V = e^{-Y}$, 取值于 $[0, 1]$ 。由假设对一切 $n \geq 1$ 有 $\mathbb{E}[U^n] = \mathbb{E}[V^n]$, $n = 0$ 平凡。故对一切多项式 p 有 $\mathbb{E}[p(U)] = \mathbb{E}[p(V)]$, 由 Weierstrass 定理与控制收敛, 对一切 $\varphi \in C([0, 1])$ 有 $\mathbb{E}[\varphi(U)] = \mathbb{E}[\varphi(V)]$, 于是 $U \stackrel{(d)}{=} V$ (命题 2.4), 从而 $X = -\log U \stackrel{(d)}{=} Y$ 。(3) 令 $k = g - h$, $u = e^{-t}$, 则 $\int_0^1 u^{n-1} k(-\log u) du = 0$ 对 $n \geq 1$ 。同上论证得 $\int_0^1 \varphi(u) k(-\log u) du = 0$ 对一切 $\varphi \in C([0, 1])$ 成立; 由命题 1.14 (应用于测度 $k^\pm(-\log u) du$) 得 $k(-\log u) = 0$ a.e., 由连续性 $k \equiv 0$ 。

例 2.3 若 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, 则 $g_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$; 若 $X \sim \Gamma(a, \theta)$, 则 $L_X(\lambda) = (\theta/(\theta + \lambda))^a$ 。

第3章 独立性

独立性是概率论区别于一般测度论的第一个核心概念。本章给出它的定义与刻画，证明 Borel–Cantelli 引理与 Kolmogorov 0-1 律，构造独立随机变量序列（以及更一般的、具有给定有限维分布的随机过程），并讨论独立和、高斯向量与 Poisson 过程。

3.1 独立的 σ -代数与随机变量

定义 3.1

子 σ -代数族 $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ 称为独立的，若对 I 的任一有限子集 $\{i_1, \dots, i_n\}$ 及任意 $A_k \in \mathcal{G}_{i_k}$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n).$$

随机变量族 $(X_i)_{i \in I}$ 称为独立的，若 $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ 独立。事件族 (A_i) 独立，若 $(\sigma(\mathbf{1}_{A_i}))$ 独立，即 σ -代数 $\{\emptyset, A_i, A_i^c, \Omega\}$ 独立。

命题 3.2 (π -系判别法)

设对每个 $i \in I$, $\mathcal{C}_i$ 是包含 Ω 的 π -系, $\mathcal{G}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$ 。若对一切有限 $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ (互不相同) 与 $C_k \in \mathcal{C}_{i_k}$ 有 $\mathbb{P}(C_1 \cap \dots \cap C_n) = \prod_k \mathbb{P}(C_k)$, 则 $(\mathcal{G}_i)$ 独立。

证明 只需处理有限族 $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ 。固定 $C_2 \in \mathcal{C}_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}_n$, 满足 $\mathbb{P}(A \cap C_2 \cap \dots \cap C_n) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C_2) \cdots \mathbb{P}(C_n)$ 的 A 全体是包含 $\mathcal{C}_1$ 的 λ -系, 由定理 1.6 包含 $\mathcal{G}_1$ 。于是可以把 $\mathcal{C}_1$ 换成 $\mathcal{G}_1$; 再对第二个指标重复, 依此类推。(因 $\Omega \in \mathcal{C}_i$, 乘积公式对子族也成立。)

命题 3.3 (分组引理)

设 $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ 独立, $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ 为不交分划, $\mathcal{H}_j = \sigma(\mathcal{G}_i : i \in I_j)$ 。则 $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$ 独立。

证明 令 $\mathcal{C}_j$ 为形如 $A_1 \cap \dots \cap A_m$ ($A_k \in \mathcal{G}_{i_k}$, $i_k \in I_j$ 有限个) 的集合全体, 它是包含 Ω 的 π -系且生成 $\mathcal{H}_j$ 。由 $(\mathcal{G}_i)$ 的独立性, $(\mathcal{C}_j)$ 满足命题 3.2 的乘积条件。

例如, 若 $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ 独立, 则 $f(X_1, \dots, X_n)$ 与 $g(Y_1, \dots, Y_m)$ 独立。

定理 3.4

设 X_k 取值于 $(E_k, \mathcal{E}_k)$, $k = 1, \dots, n$ 。以下等价:

1. $X_1, \dots, X_n$ 独立;
2. $(X_1, \dots, X_n)$ 的分布是乘积测度 $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$;
3. 对一切非负 (或一切有界) 可测 f_k , $\mathbb{E}[\prod_k f_k(X_k)] = \prod_k \mathbb{E}[f_k(X_k)]$ 。

若 $E_k = \mathbb{R}^{d_k}$, 它们还等价于: (4) 对一切 $\xi_k \in \mathbb{R}^{d_k}$, $\Phi_{(X_1, \dots, X_n)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_k \Phi_{X_k}(\xi_k)$ 。

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2): 二者都说 $\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in B_1 \times \dots \times B_n) = \prod \mathbb{P}(X_k \in B_k)$ ——(2) $\Rightarrow$ (1)直接, (1) $\Rightarrow$ (2)是因为可测矩形构成生成乘积 σ -代数的 π -系 (推论 1.7)。(2) $\Rightarrow$ (3)是 Fubini–Tonelli 定理; (3) $\Rightarrow$ (1)取示性函数。(2) $\Rightarrow$ (4)由(3) (对实部虚部展开, 或直接对有界复值函数用 Fubini); (4) $\Rightarrow$ (2): 右边是乘积测度的特征函数, 由定理 2.11。

推论 3.5

若 $X, Y \in L^1$ 为独立实随机变量, 则 $XY \in L^1$ 且 $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ 。特别地, 若还有 $X, Y \in L^2$, 则 $\text{Cov}(X, Y) = 0$, $\text{Var}(X + Y) = \text{Var} X + \text{Var} Y$ 。

证明 由(3)得 $\mathbb{E}|XY| = \mathbb{E}|X|\mathbb{E}|Y| < \infty$; 再对 $X^\pm, Y^\pm$ 展开。

若 $X_1, \dots, X_n$ 是实随机变量且各有密度 p_k , 则它们独立当且仅当 $(X_1, \dots, X_n)$ 有密度 $p_1(x_1) \cdots p_n(x_n)$ (由 (2) 与 $\lambda_n = \lambda_1^{\otimes n}$)。

3.2 Borel–Cantelli 引理与 0-1 律

对事件序列 (A_n) , $\limsup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k = \{\omega : \omega \in A_n \text{ 对无穷多个 } n\}$ 。

引理 3.6 (Borel–Cantelli)

(1) 若 $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, 则 $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ 。(2) 若 (A_n) 独立且 $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$, 则 $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ 。

证明 (1) $\mathbb{E}[\sum_n \mathbf{1}_{A_n}] = \sum \mathbb{P}(A_n) < \infty$, 故 $\sum \mathbf{1}_{A_n} < \infty$ a.s.

(2) 对 $n \leq m$, 由独立性与 $1 - x \leq e^{-x}$, $\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^m A_k^c) = \prod_{k=n}^m (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \exp(-\sum_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k)) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$)。故 $\mathbb{P}(\bigcup_{k \geq n} A_k) = 1$ 对一切 n , 从而 $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ 。

定理 3.7 (Kolmogorov 0-1 律)

设 $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$ 是独立的 σ -代数序列, $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_n \sigma(\mathcal{G}_k : k \geq n)$ 为尾 σ -代数。则对一切 $A \in \mathcal{G}_\infty$, $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ 。

证明 令 $\mathcal{D}_n = \sigma(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n)$ 。由分组引理, $\mathcal{D}_n$ 与 $\sigma(\mathcal{G}_k : k > n) \supset \mathcal{G}_\infty$ 独立。因此 $\mathcal{G}_\infty$ 与 $\bigcup_n \mathcal{D}_n$ 独立; 后者是包含 Ω 的 π -系, 由命题 3.2, $\mathcal{G}_\infty$ 与 $\sigma(\bigcup_n \mathcal{D}_n) = \sigma(\mathcal{G}_n : n \geq 1) \supset \mathcal{G}_\infty$ 独立。故 $A \in \mathcal{G}_\infty$ 与自身独立: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$ 。

例 3.1 设 (X_n) 为独立实随机变量。则 $\limsup_n \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ 是关于尾 σ -代数可测的 (改变有限项不影响它), 故 a.s. 等于某个 $[-\infty, \infty]$ 中的常数; $\{\sum X_n \text{ 收敛}\}$ 的概率为 0 或 1。

3.3 独立序列的构造

定理 3.8

在 $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ 上, 令 $\varepsilon_n(\omega) = \lfloor 2^n \omega \rfloor - 2 \lfloor 2^{n-1} \omega \rfloor$ 为 ω 的第 n 个二进制数字。则 $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ 独立同分布, $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 0) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = 1/2$ 。

证明 对任意 $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$, $\{\varepsilon_1 = a_1, \dots, \varepsilon_n = a_n\}$ 是长为 2^{-n} 的区间 $[\sum_k a_k 2^{-k}, \sum_k a_k 2^{-k} + 2^{-n})$, 故其概率为 $2^{-n} = \prod_k \mathbb{P}(\varepsilon_k = a_k)$ 。

推论 3.9

在 $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ 上存在独立随机变量序列 $(U_n)_{n \geq 1}$, 每个都在 $[0, 1]$ 上均匀分布。因此对 $\mathbb{R}$ 上任意概率测度序列 (μ_n) , 存在独立随机变量序列 (X_n) 使 $X_n \sim \mu_n$ 。

证明 取双射 $\phi : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, 令 $U_i = \sum_{j \geq 1} \varepsilon_{\phi(i,j)} 2^{-j}$ 。由分组引理 (U_i) 独立。对固定的 i , $(\varepsilon_{\phi(i,j)})_j$ 与 $(\varepsilon_j)_j$ 同分布 (其有限维分布相同), 故 U_i 与 $\omega = \sum_j \varepsilon_j(\omega) 2^{-j}$ 同分布, 即均匀分布。再令 $X_n = G_n(U_n)$, G_n 为 μ_n 的分布函数的广义逆 (定理 1.13)。

上面的构造对实值随机变量已经足够。为了构造一般的随机过程, 我们需要 Kolmogorov 扩张定理。

定义 3.10

设 T 为任意指标集, $(E_t)_{t \in T}$ 为可测空间。对有限子集 $J \subset J' \subset T$, 记 $\pi_J^{J'} : \prod_{t \in J'} E_t \rightarrow \prod_{t \in J} E_t$ 为投影, $\pi_J = \pi_J^T$ 。一族概率测度 $(\mu_J)_{J \subset T \text{ 有限}}$ (μ_J 定义在 $\prod_{t \in J} E_t$ 上) 称为相容的, 若对一切有限 $J \subset J'$ 有 $(\pi_J^{J'})_{\#} \mu_{J'} = \mu_J$ 。

定理 3.11 (Kolmogorov 扩张定理)

设每个 E_t 是 Polish 空间 (配 Borel σ -代数), (μ_J) 相容。则在 $(\Omega, \mathcal{F}) = (\prod_{t \in T} E_t, \bigotimes_t \mathcal{B}(E_t))$ 上存在唯一的概率测度 $\mathbb{P}$ 使 $(\pi_J)_\# \mathbb{P} = \mu_J$ 对一切有限 J 成立。

证明 柱集代数: 形如 $\pi_J^{-1}(B)$ (J 有限, $B \in \mathcal{B}(E^J)$), 记 $E^J = \prod_{t \in J} E_t$ 的集合称为柱集, 它们构成生成 $\mathcal{F}$ 的集代数 $\mathcal{C}$ (两个柱集总可以写在同一个有限 J 上, 由引理 1.4, $\mathcal{B}(E^J) = \bigotimes_{t \in J} \mathcal{B}(E_t)$)。令 $\mathbb{P}_0(\pi_J^{-1}(B)) = \mu_J(B)$ 。若 $\pi_J^{-1}(B) = \pi_{J'}^{-1}(B')$, 取 $J'' = J \cup J'$, 则 $(\pi_{J''}^{-1}(B)) = (\pi_{J''}^{-1}(B'))$, 由相容性两种定义都等于 $\mu_{J''}$ 在这个集合上的值, 故 $\mathbb{P}_0$ 良定, 且显然有限可加, $\mathbb{P}_0(\Omega) = 1$ 。

在空集处连续: 设 $C_n = \pi_{J_n}^{-1}(B_n) \in \mathcal{C}$ 递减且 $\mathbb{P}_0(C_n) \geq \varepsilon > 0$, 要证 $\bigcap C_n \neq \emptyset$ 。不妨设 J_n 递增。 E^{J_n} 是 Polish 空间, 由定理 1.15 取紧集 $K_n \subset B_n$ 使 $\mu_{J_n}(B_n \setminus K_n) \leq \varepsilon 2^{-n-1}$ 。令 $D_n = \bigcap_{k \leq n} \pi_{J_k}^{-1}(K_k) \subset C_n$, 则

$$\mathbb{P}_0(C_n \setminus D_n) \leq \sum_{k \leq n} \mathbb{P}_0(C_k \setminus \pi_{J_k}^{-1}(K_k)) \leq \varepsilon/2,$$

故 $\mathbb{P}_0(D_n) \geq \varepsilon/2$, $D_n \neq \emptyset$ 。取 $x^n \in D_n$ 。对每个 k 与 $n \geq k$, $\pi_{J_k}(x^n) \in K_k$ 。可数集 $J_\infty = \bigcup_k J_k$ 中的每个坐标都属于某个 J_k , 由对角线法可取子列 (n_l) 使对每个 k , $\pi_{J_k}(x^{n_l})$ 在紧集 K_k 中收敛到某点 y^k 。这些极限彼此相容, 故存在 $x \in \Omega$ (在 $T \setminus J_\infty$ 上的坐标任取) 使 $\pi_{J_k}(x) = y^k \in K_k$ 对一切 k 。于是 $x \in \bigcap_k D_k \subset \bigcap_k C_k$ 。

所以 $\mathbb{P}_0$ 在 $\mathcal{C}$ 上可数可加, 由 Carathéodory 延拓定理 (第 1.2 节) 延拓为 $\mathcal{F}$ 上的概率测度; 唯一性由推论 1.7 ($\mathcal{C}$ 是 π -系)。

推论 3.12

设 $(\nu_t)_{t \in T}$ 是 Polish 空间 E_t 上的概率测度。则存在独立随机变量族 $(X_t)_{t \in T}$ 使 $X_t \sim \nu_t$ 。

证明 取 $\mu_J = \bigotimes_{t \in J} \nu_t$, 它们显然相容, 在定理 3.11 给出的空间上取 $X_t = \pi_t$; 独立性由定理 3.4。

3.4 独立和

定义 3.13

$\mathbb{R}^d$ 上概率测度 μ, ν 的卷积 $\mu * \nu$ 是 $\mu \otimes \nu$ 在 $(x, y) \mapsto x + y$ 下的像测度。

命题 3.14

设 X, Y 为独立的 $\mathbb{R}^d$ 值随机变量。则: (1) $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$; 若 X, Y 分别有密度 p, q , 则 $X+Y$ 有密度 $p * q(z) = \int p(x)q(z-x)dx$ 。(2) $\Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y$ 。(3) 若 $X, Y \in L^2$, 则 $K_{X+Y} = K_X + K_Y$ 。

证明 (1) 由定理 3.4, $\mathbb{E}[\varphi(X+Y)] = \iint \varphi(x+y) \mathbb{P}_X(dx) \mathbb{P}_Y(dy)$ 。有密度时用 Fubini 与平移 $y = z - x$ 。(2) 由定理 3.4(3)。(3) 由推论 3.5 逐分量计算。

例 3.2 $\mathcal{P}(\lambda) * \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ (看母函数), $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) * \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ (看特征函数), $\Gamma(a, \theta) * \Gamma(b, \theta) = \Gamma(a+b, \theta)$ (看 Laplace 变换)。特别地, n 个独立 $\mathcal{E}(\lambda)$ 变量之和服从 $\Gamma(n, \lambda)$ 。

定理 3.15 (L^2 弱大数定律)

设 (X_n) 是 L^2 中两两不相关的实随机变量, $\mathbb{E}[X_n] = m$, $\sup_n \text{Var}(X_n) < \infty$ 。则 $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \rightarrow m$ 在 L^2 中, 从而依概率收敛。

证明 $\mathbb{E}[(\frac{S_n}{n} - m)^2] = \frac{1}{n^2} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k \leq n} \text{Var} X_k \leq \frac{C}{n}$ 。依概率收敛由 Chebyshev 不等式。

3.5 高斯向量

定义 3.16

$\mathbb{R}^d$ 值随机变量 X 称为高斯向量, 若对一切 $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\langle \xi, X \rangle$ 服从高斯分布 (允许退化的 $\mathcal{N}(m, 0)$)。 

命题 3.17

(1) 若 X 是高斯向量, 均值 m , 协方差矩阵 K , 则 $\Phi_X(\xi) = \exp(i\langle \xi, m \rangle - \frac{1}{2}\langle \xi, K\xi \rangle)$; 特别地 X 的分布由 (m, K) 决定, 记为 $\mathcal{N}(m, K)$ 。(2) 对任意 $m \in \mathbb{R}^d$ 与对称半正定矩阵 K , 存在服从 $\mathcal{N}(m, K)$ 的高斯向量; 若 K 可逆, 其密度为

$$(2\pi)^{-d/2}(\det K)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x - m, K^{-1}(x - m) \rangle\right).$$

(3) 若 X 是高斯向量, A 为 $n \times d$ 矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$, 则 $AX + b$ 是高斯向量。(4) 设 $(X_1, \dots, X_d)$ 是高斯向量, 则 $X_1, \dots, X_d$ 独立当且仅当 K 是对角矩阵。更一般地, 若 $(Y_1, \dots, Y_p, Z_1, \dots, Z_q)$ 是高斯向量, 且 $\text{Cov}(Y_i, Z_j) = 0$ 对一切 i, j , 则 $Y = (Y_i)$ 与 $Z = (Z_j)$ 独立。 

证明 (1) $\langle \xi, X \rangle \sim \mathcal{N}(\langle \xi, m \rangle, \langle \xi, K\xi \rangle)$, 由命题 2.10 在 1 处取值即可; 唯一性由定理 2.11。

(2) 取独立的 $Z_1, \dots, Z_d \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (推论 3.9), $Z = (Z_i)$, 则 $\Phi_Z(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$, 故 $\langle \xi, Z \rangle \sim \mathcal{N}(0, |\xi|^2)$, Z 是高斯向量。取对称半正定的 $A = K^{1/2}$, $X = m + AZ$, 则 $\langle \xi, X \rangle = \langle \xi, m \rangle + \langle A\xi, Z \rangle$ 是高斯的, 协方差为 $AA^\top = K$ 。若 K 可逆, Z 的密度为 $(2\pi)^{-d/2}e^{-|z|^2/2}$, 用线性变量替换即得 X 的密度。

(3) $\langle \eta, AX + b \rangle = \langle A^\top \eta, X \rangle + \langle \eta, b \rangle$ 。

(4) 若 K 呈分块对角形 $\begin{pmatrix} K_Y & 0 \\ 0 & K_Z \end{pmatrix}$, 则 $\Phi_{(Y,Z)}(\eta, \zeta) = \Phi_Y(\eta)\Phi_Z(\zeta)$, 由定理 3.4(4) 得独立。反方向由推论

3.5。

注 “每个分量都是高斯变量”不足以推出“是高斯向量”: 若 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, ε 与 X 独立且 $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$, 则 $\varepsilon X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\text{Cov}(X, \varepsilon X) = 0$, 但 $X + \varepsilon X$ 在 0 处有原子, X 与 εX 也不独立。

3.6 Poisson 过程

定理 3.18

设 $T_1, T_2, \dots$ 独立同分布于 $\mathcal{E}(\lambda)$, $S_n = T_1 + \dots + T_n$, $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$ ($t \geq 0$)。则对 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$, 随机变量 $N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ 独立, 且 $N_{t_j} - N_{t_{j-1}} \sim \mathcal{P}(\lambda(t_j - t_{j-1}))$ 。 $(N_t)_{t \geq 0}$ 称为强度为 λ 的 Poisson 过程。 

证明 由独立性与变量替换 $s_j = t_1 + \dots + t_j$ (Jacobi 行列式为 1), $(S_1, \dots, S_{m+1})$ 有密度 $\lambda^{m+1}e^{-\lambda s_{m+1}} \mathbf{1}_{\{0 < s_1 < \dots < s_{m+1}\}}$ 。给定 $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, 令 $m = n_1 + \dots + n_k$ 。事件 $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j, j = 1, \dots, k\}$ 等于: $S_m \leq t_k < S_{m+1}$, 且 $S_1, \dots, S_m$ 中恰有 n_j 个落在 $(t_{j-1}, t_j]$ 中。对 s_{m+1} 在 (t_k, ∞) 上积分得 $\lambda^m e^{-\lambda t_k}$; 集合

$$\{0 < s_1 < \dots < s_m \leq t_k : \#\{i : s_i \in (t_{j-1}, t_j]\} = n_j \forall j\}$$

是 k 个单纯形 $\{t_{j-1} < u_1 < \dots < u_{n_j} \leq t_j\}$ 的乘积, 体积为 $\prod_j (t_j - t_{j-1})^{n_j} / n_j!$ 。故所求概率为

$$\lambda^m e^{-\lambda t_k} \prod_{j=1}^k \frac{(t_j - t_{j-1})^{n_j}}{n_j!} = \prod_{j=1}^k e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{n_j}}{n_j!}.$$

对 $(n_1, \dots, n_k)$ 求和得 1, 于是 $N_{t_k} < \infty$ a.s., 并且上式同时给出了增量的分布与独立性。

注 Poisson 过程是第 13 章中“有限状态跳过程”与 Lévy 过程的最简单例子。其路径右连续、取整数值、跳跃为 1, 相邻跳跃之间的间隔是独立的指数变量。

第4章 随机变量的收敛与极限定理

本章讨论随机变量序列的各种收敛方式，并证明概率论中最著名的两个极限定理：强大数定律与中心极限定理。我们还引入一致可积性，它是第6章鞅收敛理论的关键工具。

4.1 收敛方式

定义 4.1

设 X_n, X 为 $\mathbb{R}^d$ 值随机变量。

1. $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ (几乎必然收敛): $\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = 1$ 。
2. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ (依概率收敛): 对一切 $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$ 。
3. $X_n \rightarrow X$ 于 L^p ($p \geq 1$): $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \rightarrow 0$ 。

命题 4.2

(1) a.s. 收敛或 L^p 收敛蕴含依概率收敛。(2) 若 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, 则存在子列 $X_{n_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 。(3) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ 当且仅当 $\mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] \rightarrow 0$ 。

证明 (1) a.s. 情形: $\mathbf{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} \rightarrow 0$ a.s., 用控制收敛; L^p 情形用 Markov 不等式。(2) 取 n_k 递增使 $\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > 2^{-k}) \leq 2^{-k}$, 由 Borel–Cantelli 引理 3.6, a.s. 对充分大的 k 有 $|X_{n_k} - X| \leq 2^{-k}$ 。(3) 对 $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varepsilon \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] \leq \varepsilon + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ 。

注 依概率收敛不蕴含 a.s. 收敛: 在 $[0, 1]$ 上, 令 $X_n = \mathbf{1}_{[j2^{-k}, (j+1)2^{-k})}$, 其中 $n = 2^k + j$, $0 \leq j < 2^k$ 。则 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ 但 $X_n(\omega)$ 对每个 ω 都不收敛。

4.2 一致可积性

定义 4.3

实随机变量族 $(X_i)_{i \in I}$ 称为一致可积的 (UI), 若

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > a\}}] = 0.$$

命题 4.4

(1) 有限族 $\{X\} \subset L^1$ 是 UI 的; 若 $|X_i| \leq Y \in L^1$, 则 (X_i) 是 UI 的。(2) 若 $\sup_i \mathbb{E}[|X_i|^p] < \infty$ 对某个 $p > 1$ 成立, 则 (X_i) 是 UI 的。(3) (X_i) 是 UI 的, 当且仅当 $\sup_i \mathbb{E}|X_i| < \infty$, 且对每个 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使 $\mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \sup_i \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_A] < \varepsilon$ 。

证明 (1) 由控制收敛, $\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{\{Y > a\}}] \rightarrow 0$ 。(2) $\mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > a\}}] \leq a^{1-p} \mathbb{E}[|X_i|^p]$ 。(3) 若 UI, 取 a 使 $\sup_i \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| > a\}}] < \varepsilon/2$, 则 $\mathbb{E}|X_i| \leq a + \varepsilon/2$, 且 $\mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_A] \leq a\mathbb{P}(A) + \varepsilon/2$, 取 $\delta = \varepsilon/(2a)$ 。反之, 由 Markov 不等式 $\mathbb{P}(|X_i| > a) \leq \sup_j \mathbb{E}|X_j|/a < \delta$ (a 充分大), 再取 $A = \{|X_i| > a\}$ 。

定理 4.5 (Vitali)

设 $X_n, X \in L^1$ 。则 $X_n \rightarrow X$ 于 L^1 当且仅当 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ 且 (X_n) 是 UI 的。更一般地, 若 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ 且 (X_n) UI, 则 $X \in L^1$ 且 $X_n \rightarrow X$ 于 L^1 。

证明 设 $X_n \rightarrow X$ 于 L^1 。依概率收敛已知。对 $\varepsilon > 0$ 取 N 使 $n \geq N \Rightarrow \mathbb{E}|X_n - X| < \varepsilon$ 。有限族 $\{X, X_1, \dots, X_N\}$ 满足命题 4.4(3) 中的条件，取相应的 δ ；则对 $n > N$ 与 $\mathbb{P}(A) < \delta$ ， $\mathbb{E}[|X_n| \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[|X| \mathbf{1}_A] + \varepsilon < 2\varepsilon$ 。 L^1 有界性显然。由 (3)， (X_n) UI。

反之，设 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ 且 UI。由命题 4.2(2) 与 Fatou 引理， $\mathbb{E}|X| \leq \liminf \mathbb{E}|X_{n_k}| < \infty$ 。对 $\varepsilon > 0$ ，取 δ 使 (3) 中的条件对族 $\{X_n\} \cup \{X\}$ 成立。则

$$\mathbb{E}|X_n - X| \leq \varepsilon + \mathbb{E}[(|X_n| + |X|)\mathbf{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] \leq \varepsilon + 2\varepsilon$$

只要 $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \delta$ ，而这对充分大的 n 成立。

4.3 强大数定律

定理 4.6 (强大数定律)

设 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是两两独立、同分布的实随机变量， $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ 。则

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}[X_1].$$

反之，若 (X_n) 独立同分布且 $\mathbb{E}|X_1| = \infty$ ，则 $\limsup_n |X_1 + \dots + X_n|/n = \infty$ a.s.

证明 [证明 (Etemadi [6])] 由于 X_n^+ 与 X_n^- 分别仍是两两独立同分布的，不妨设 $X_n \geq 0$ 。记 $X = X_1$ ， $S_n = X_1 + \dots + X_n$ 。

截断。令 $Y_k = X_k \mathbf{1}_{\{X_k \leq k\}}$ ， $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$ 。由于 $\sum_k \mathbb{P}(X_k > k) = \sum_k \mathbb{P}(X > k) \leq \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt = \mathbb{E}X < \infty$ ，由 Borel–Cantelli, a.s. 只有有限多个 k 使 $X_k \neq Y_k$ 。于是只需证 $T_n/n \rightarrow \mathbb{E}X$ a.s.

沿几何子列。固定 $\alpha > 1$ ，令 $k_n = \lfloor \alpha^n \rfloor$ 。由两两独立 (推论 3.5)， $\text{Var}(T_m) = \sum_{j \leq m} \text{Var}(Y_j) \leq \sum_{j \leq m} \mathbb{E}[Y_j^2]$ 。由 Chebyshev 不等式，对 $\varepsilon > 0$ ，

$$\sum_n \mathbb{P}(|T_{k_n} - \mathbb{E}T_{k_n}| > \varepsilon k_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_n \frac{1}{k_n^2} \sum_{j \leq k_n} \mathbb{E}[Y_j^2] = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_j \mathbb{E}[Y_j^2] \sum_{n: k_n \geq j} \frac{1}{k_n^2}.$$

由于 $k_n \geq \alpha^n/2$ ， $\sum_{n: \alpha^n \geq j} k_n^{-2} \leq 4 \sum_{n: \alpha^n \geq j} \alpha^{-2n} \leq \frac{4}{(1-\alpha^{-2})j^2}$ 。又利用 $\sum_{j \geq m} j^{-2} \leq 2/m$ ，

$$\sum_j \frac{\mathbb{E}[Y_j^2]}{j^2} = \sum_j \frac{1}{j^2} \sum_{m \leq j} \mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{\{m-1 < X \leq m\}}] \leq \sum_m \frac{2}{m} \mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{\{m-1 < X \leq m\}}] \leq 2\mathbb{E}X < \infty.$$

因此由 Borel–Cantelli (让 ε 取遍 $1/k$)， $(T_{k_n} - \mathbb{E}T_{k_n})/k_n \rightarrow 0$ a.s. 又由单调收敛 $\mathbb{E}[Y_j] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \leq j\}}] \rightarrow \mathbb{E}X$ ，故其 Cesàro 平均 $\mathbb{E}T_m/m \rightarrow \mathbb{E}X$ 。于是 $T_{k_n}/k_n \rightarrow \mathbb{E}X$ a.s.

填补。对 $k_n \leq m \leq k_{n+1}$ ，由 $Y_j \geq 0$ ，

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{T_{k_n}}{k_n} \leq \frac{T_m}{m} \leq \frac{k_{n+1}}{k_n} \cdot \frac{T_{k_{n+1}}}{k_{n+1}},$$

而 $k_{n+1}/k_n \rightarrow \alpha$ 。故 a.s. $\alpha^{-1}\mathbb{E}X \leq \liminf T_m/m \leq \limsup T_m/m \leq \alpha\mathbb{E}X$ 。让 α 沿 $1 + 1/k$ 趋于 1 即得。

逆命题。若 $\mathbb{E}|X| = \infty$ ，则对每个 $K > 0$ ， $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > Kn) = \sum_n \mathbb{P}(|X|/K > n) = \infty$ ，由 Borel–Cantelli 第二引理，a.s. 无穷多次 $|X_n| > Kn$ 。而 $|X_n| \leq |S_n| + |S_{n-1}|$ ，故 a.s. $\limsup |S_n|/n \geq K/2$ 。

注 第 6 章将用反向鞅给出强大数定律的另一证明 (定理 6.21)。

4.4 依分布收敛

定义 4.7

设 E 为度量空间。 E 上的概率测度序列 μ_n 弱收敛到 μ , 若对一切 $f \in C_b(E)$ (有界连续函数) 有 $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ 。随机变量 X_n 依分布收敛到 X ($X_n \xrightarrow{(d)} X$), 若 $\mathbb{P}_{X_n}$ 弱收敛到 $\mathbb{P}_X$ 。



注意依分布收敛只是关于分布的陈述, X_n 与 X 甚至可以定义在不同的概率空间上。由命题 1.14, 弱极限是唯一的。

定理 4.8 (Portmanteau)

设 μ_n, μ 为度量空间 E 上的概率测度。以下等价:

1. $\mu_n \rightarrow \mu$ 弱收敛;
2. 对一切有界 Lipschitz 函数 f , $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$;
3. 对一切闭集 F , $\limsup \mu_n(F) \leq \mu(F)$;
4. 对一切开集 U , $\liminf \mu_n(U) \geq \mu(U)$;
5. 对一切满足 $\mu(\partial A) = 0$ 的 Borel 集 A , $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ 。

当 $E = \mathbb{R}$ 时, 它们还等价于: (6) 在 F_μ 的每个连续点 x 处, $F_{\mu_n}(x) \rightarrow F_\mu(x)$ 。



证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然。(2) $\Rightarrow$ (3): $f_k = (1 - k d(\cdot, F))^+$ 是有界 Lipschitz 的, $f_k \geq \mathbf{1}_F$, 故 $\limsup \mu_n(F) \leq \int f_k d\mu \leq \mu(F)$ 。(3) $\Leftrightarrow$ (4) 取补集。(3)+(4) $\Rightarrow$ (5): 记 $\mathring{A}$ 与 $\bar{A}$ 为内部与闭包,

$$\mu(\mathring{A}) \leq \liminf \mu_n(\mathring{A}) \leq \liminf \mu_n(A) \leq \limsup \mu_n(A) \leq \limsup \mu_n(\bar{A}) \leq \mu(\bar{A}),$$

而 $\mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A}) = \mu(A)$ 。(5) $\Rightarrow$ (1): 设 $f \in C_b$, 不妨 $0 < f < 1$ 。对 $t \in (0, 1)$, $\partial\{f > t\} \subset \{f = t\}$, 而 $\mu(\{f = t\}) > 0$ 的 t 至多可数。由 (5) 与控制收敛, $\int f d\mu_n = \int_0^1 \mu_n(f > t) dt \rightarrow \int_0^1 \mu(f > t) dt = \int f d\mu$ 。

(5) $\Rightarrow$ (6): $\partial(-\infty, x] = \{x\}$ 。(6) $\Rightarrow$ (2) ($E = \mathbb{R}$): F_μ 的连续点稠密。给定有界 Lipschitz f 与 $\varepsilon > 0$, 取连续点 $a < b$ 使 $\mu((a, b]^c) < \varepsilon$, 再取连续点 $a = x_0 < \dots < x_k = b$ 使 f 在每个 $(x_{j-1}, x_j]$ 上振幅 $< \varepsilon$ 。阶梯函数 $g = \sum_j f(x_j) \mathbf{1}_{(x_{j-1}, x_j]}$ 满足 $\int g d\mu_n \rightarrow \int g d\mu$, 且 $|f - g| \leq \varepsilon + \|f\|_\infty \mathbf{1}_{(a, b]^c}$; 而 $\mu_n((a, b]^c) \rightarrow \mu((a, b]^c) < \varepsilon$ 。故 $\limsup |\int f d\mu_n - \int f d\mu| \leq 2\varepsilon + 2\|f\|_\infty \varepsilon$ 。

引理 4.9

设 μ_n, μ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度, 且对一切 $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ (紧支连续函数) 有 $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ 。则 $\mu_n \rightarrow \mu$ 弱收敛。



证明 给定 $\varepsilon > 0$, 取 $h \in C_c$, $0 \leq h \leq 1$, $\int h d\mu \geq 1 - \varepsilon$ 。则 $\int (1 - h) d\mu_n \rightarrow \int (1 - h) d\mu \leq \varepsilon$ 。对 $f \in C_b$, $fh \in C_c$, 而 $|\int f d\mu_n - \int f d\mu| \leq |\int fh d\mu_n - \int fh d\mu| + \|f\|_\infty (\int (1 - h) d\mu_n + \int (1 - h) d\mu)$, 其上极限 $\leq 2\varepsilon \|f\|_\infty$ 。

命题 4.10

(1) 若 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, 则 $X_n \xrightarrow{(d)} X$ 。(2) 若 $X_n \xrightarrow{(d)} c$ (常数), 则 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ 。(3) (Slutsky) 若 $X_n \xrightarrow{(d)} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ (常数), 则 $(X_n, Y_n) \xrightarrow{(d)} (X, c)$; 特别地 $X_n + Y_n \xrightarrow{(d)} X + c$, $X_n Y_n \xrightarrow{(d)} cX$ 。



证明 (1) 对有关 L -Lipschitz 函数 f , $|\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| \leq L\varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$, 用定理 4.8(2)。(2) 对 $F = \{|x - c| \geq \varepsilon\}$ 用 (3)。(3) 对有关 Lipschitz 的 $f(x, y)$, $|\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)| \leq L\varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_n - c| > \varepsilon)$, 而 $\mathbb{E}f(X_n, c) \rightarrow \mathbb{E}f(X, c)$ 。

定理 4.11 (Lévy 连续性定理)

设 μ_n, μ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度。则 $\mu_n \rightarrow \mu$ 弱收敛当且仅当对一切 $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\hat{\mu}_n(\xi) \rightarrow \hat{\mu}(\xi)$ 。



证明 必要性: $x \mapsto e^{i(\xi, x)}$ 的实部与虚部是有界连续的。充分性: 沿用定理 2.11 证明中的记号。对 $f \in C_c$, 由 Fubini,

$$\int f * g_\sigma d\mu_n = \int f(x) \left(\int g_\sigma(x-y) \mu_n(dy) \right) dx = \int f(x) (2\pi)^{-d} \int e^{i(\xi, x)} e^{-\sigma^2 |\xi|^2/2} \hat{\mu}_n(-\xi) d\xi dx,$$

其中 $f * g_\sigma(y) = \int f(x) g_\sigma(x-y) dx$ 。由控制收敛 ($|\hat{\mu}_n| \leq 1$), 右边收敛到把 $\hat{\mu}_n$ 换为 $\hat{\mu}$ 的同一表达式, 即 $\int f * g_\sigma d\mu$ 。由于 f 一致连续, $\|f * g_\sigma - f\|_\infty \leq \sup_y \int |f(y+\sigma z) - f(y)| g_1(z) dz \rightarrow 0$ ($\sigma \rightarrow 0$)。故 $\limsup_n |\int f d\mu_n - \int f d\mu| \leq 2\|f * g_\sigma - f\|_\infty$ 对一切 $\sigma > 0$, 即 $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ 。由引理 4.9 得证。

定义 4.12

$\mathbb{R}^d$ 上的概率测度族 $(\mu_i)_{i \in I}$ 称为胎紧的, 若对每个 $\varepsilon > 0$ 存在紧集 K 使 $\sup_i \mu_i(K^c) < \varepsilon$ 。

定理 4.13 (Helly 选择定理)

$\mathbb{R}$ 上的胎紧概率测度序列 (μ_n) 有弱收敛的子列。

证明 记 F_n 为分布函数。由对角线法, 取子列 (仍记为 F_n) 使 $F_n(q) \rightarrow G(q)$ 对一切 $q \in \mathbb{Q}$ 成立。令 $F(x) = \inf_{q > x, q \in \mathbb{Q}} G(q)$, 它不减、右连续。若 x 是 F 的连续点, 则: $\limsup F_n(x) \leq G(q)$ 对一切有理 $q > x$, 故 $\leq F(x)$; $\liminf F_n(x) \geq G(q') \geq F(q'')$ 对有理 $q'' < q' < x$, 令 $q'' \uparrow x$ 得 $\geq F(x-) = F(x)$ 。由胎紧性, 取 M 使 $\mu_n([-M, M]^c) < \varepsilon$, 则对连续点 $x > M$, $F(x) \geq 1 - \varepsilon$, $x < -M$ 时 $F(x) \leq \varepsilon$; 故 $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, F 是某概率测度 μ 的分布函数 (定理 1.13)。由定理 4.8(6), $\mu_n \rightarrow \mu$ 。

引理 4.14

对 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 μ 与 $u > 0$, $\mu(\{x : |x| > 2/u\}) \leq \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \hat{\mu}(t)) dt$ 。

证明 由 Fubini, $\frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \hat{\mu}(t)) dt = \int 2(1 - \frac{\sin ux}{ux}) \mu(dx)$, 被积函数非负, 且当 $|ux| \geq 2$ 时 $\geq 2(1 - \frac{1}{2}) = 1$ 。

定理 4.15 (Lévy 连续性定理, 强形式)

设 μ_n 为 $\mathbb{R}$ 上的概率测度, $\hat{\mu}_n(t) \rightarrow \Phi(t)$ 对一切 t 成立, 且 Φ 在 0 处连续。则 Φ 是某个概率测度 μ 的特征函数, 且 $\mu_n \rightarrow \mu$ 弱收敛。

证明 由引理 4.14 与控制收敛, $\limsup_n \mu_n(|x| > 2/u) \leq \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \Phi(t)) dt$, 由 Φ 在 0 处连续 ($\Phi(0) = 1$), 右边当 $u \rightarrow 0$ 时趋于 0。故 (μ_n) 胎紧 (有限个 μ_n 自动满足)。由 Helly 定理, 每个子列有弱收敛的子子列, 其极限的特征函数为 Φ (定理 4.11), 由定理 2.11 极限 μ 唯一。若 $\mu_n \not\rightarrow \mu$, 存在 $f \in C_b$ 与子列使 $|\int f d\mu_{n_k} - \int f d\mu| \geq \varepsilon$, 与子子列收敛到 μ 矛盾。

在 $\mathbb{R}^d$ 中同样的结论成立 (逐坐标应用引理 4.14 得胎紧性; $\mathbb{R}^d$ 中的 Helly 定理可用多维分布函数类似证明), 本讲义不需要。

4.5 中心极限定理

引理 4.16

若复数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 的模都不超过 1, 则 $|\prod a_k - \prod b_k| \leq \sum |a_k - b_k|$ 。又对实数 x , $|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}| \leq \min(\frac{|x|^3}{6}, x^2)$ 。

证明 第一式由 $\prod_{k \leq n} a_k - \prod_{k \leq n} b_k = (a_n - b_n) \prod_{k < n} a_k + b_n (\prod_{k < n} a_k - \prod_{k < n} b_k)$ 归纳。第二式由 Taylor 公式的积分余项: $e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} = \frac{i^3}{2} \int_0^x (x-s)^2 e^{is} ds$, 其模 $\leq |x|^3/6$; 而 $e^{ix} - 1 - ix = i^2 \int_0^x (x-s) e^{is} ds$ 的模 $\leq x^2/2$, 加上 $x^2/2$ 得 $\leq x^2$ 。

定理 4.17 (Lindeberg 中心极限定理)

对每个 n , 设 $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ 为独立实随机变量, $\mathbb{E}X_{n,k} = 0$, $\sum_k \mathbb{E}[X_{n,k}^2] = 1$, 且满足 Lindeberg 条件:
对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,k}| > \varepsilon\}}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

则 $S_n = \sum_k X_{n,k} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, 1)$.



证明 记 $\sigma_{n,k}^2 = \mathbb{E}X_{n,k}^2$. 由 Lindeberg 条件, $\max_k \sigma_{n,k}^2 \leq \varepsilon^2 + \sum_k \mathbb{E}[X_{n,k}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,k}| > \varepsilon\}}]$, 故 $\max_k \sigma_{n,k}^2 \rightarrow 0$. 固定 ε . 由独立性 $\Phi_{S_n}(\xi) = \prod_k \Phi_{X_{n,k}}(\xi)$, 而 $e^{-\xi^2/2} = \prod_k e^{-\xi^2 \sigma_{n,k}^2/2}$. 由引理 4.16,

$$|\Phi_{S_n}(\xi) - e^{-\xi^2/2}| \leq \sum_k \left| \Phi_{X_{n,k}}(\xi) - 1 + \frac{\xi^2 \sigma_{n,k}^2}{2} \right| + \sum_k \left| e^{-\xi^2 \sigma_{n,k}^2/2} - 1 + \frac{\xi^2 \sigma_{n,k}^2}{2} \right|.$$

(对充分大的 n , $|1 - \xi^2 \sigma_{n,k}^2/2| \leq 1$.) 第二个和不超过 $\sum_k \frac{\xi^4 \sigma_{n,k}^4}{8} \leq \frac{\xi^4}{8} \max_k \sigma_{n,k}^2 \rightarrow 0$ (利用 $|e^{-u} - 1 + u| \leq u^2/2$, $u \geq 0$). 对第一个和, 由 $\mathbb{E}X_{n,k} = 0$ 与引理 4.16,

$$\left| \Phi_{X_{n,k}}(\xi) - 1 + \frac{\xi^2 \sigma_{n,k}^2}{2} \right| \leq \mathbb{E} \left[\min \left(\frac{|\xi X_{n,k}|^3}{6}, \xi^2 X_{n,k}^2 \right) \right] \leq \frac{|\xi|^3 \varepsilon}{6} \sigma_{n,k}^2 + \xi^2 \mathbb{E}[X_{n,k}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,k}| > \varepsilon\}}].$$

对 k 求和, 上极限不超过 $|\xi|^3 \varepsilon/6$. 由 ε 的任意性与 Lévy 定理 4.11 得证。

定理 4.18 (中心极限定理)

设 (X_n) 为独立同分布的 $\mathbb{R}^d$ 值随机变量, $\mathbb{E}|X_1|^2 < \infty$, 均值 m , 协方差矩阵 K . 则

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, K).$$



证明 不妨 $m = 0$. 由命题 2.12 后的注, $\Phi_{X_1}(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\langle \xi, K\xi \rangle + o(|\xi|^2)$. 由独立性,

$$\Phi_{S_n/\sqrt{n}}(\xi) = \Phi_{X_1}(\xi/\sqrt{n})^n = \left(1 - \frac{\langle \xi, K\xi \rangle}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n.$$

由引理 4.16, 它与 $(1 - \frac{\langle \xi, K\xi \rangle}{2n})^n$ 之差不超过 $n \cdot o(1/n) \rightarrow 0$, 而后者趋于 $e^{-\langle \xi, K\xi \rangle/2}$. 由命题 3.17 与 Lévy 定理即得。

例 4.1 (Poisson 逼近) 若 $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, $np_n \rightarrow \lambda > 0$, 则 $X_n \xrightarrow{(d)} \mathcal{P}(\lambda)$. 确实, 母函数 $\mathbb{E}[s^{X_n}] = (1 - p_n + p_n s)^n \rightarrow e^{\lambda(s-1)}$. 对 $\mathbb{N}$ 值随机变量, 由于 $\mathbb{E}[s^{X_n}] = \sum_k \mathbb{P}(X_n = k) s^k$, 在 $s \in [0, 1]$ 上逐点收敛蕴含每个系数收敛 (取子列使系数收敛, 由控制收敛极限的母函数相同, 再用命题 2.14(1)), 从而 $\mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(X = k)$, 这蕴含依分布收敛 (对有界 f , $\sum_k |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| \rightarrow 0$ 由 Scheffé 型论证: 正部之和等于负部之和, 而正部被 $\mathbb{P}(X = k)$ 控制)。

例 4.2 (Bernstein 多项式) 设 $f \in C([0, 1])$, $S_n \sim \mathcal{B}(n, x)$. 则 $B_n f(x) = \mathbb{E}[f(S_n/n)] = \sum_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(k/n)$ 是多项式, 且由 Chebyshev 不等式, $|B_n f(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$, 关于 x 一致地趋于 0. 这给出了 Weierstrass 逼近定理的一个概率证明。

注 一维情形也可由 Lindeberg 定理导出: 取 $X_{n,k} = X_k/(\sigma\sqrt{n})$, Lindeberg 条件化为 $\mathbb{E}[X_1^2 \mathbf{1}_{\{|X_1| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\}}] \rightarrow 0$, 由控制收敛成立。Feller 证明了: 若还有 $\max_k \sigma_{n,k}^2 \rightarrow 0$, 则 Lindeberg 条件也是必要的 (本讲义不使用)。

4.6 经验分布的收敛

定理 4.19 (Glivenko–Cantelli)

设 (X_n) 为独立同分布的实随机变量，分布函数为 F ， $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \mathbf{1}_{\{X_k \leq x\}}$ 为经验分布函数。则 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 。特别地，a.s. 经验测度 $\frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \delta_{X_k}$ 弱收敛到 X_1 的分布。



证明 对每个固定的 x ，由强大数定律 $F_n(x) \rightarrow F(x)$ 与 $F_n(x-) \rightarrow F(x-)$ a.s. 给定 $m \in \mathbb{N}^*$ ，取 $-\infty = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = +\infty$ ， $x_j = \inf\{x : F(x) \geq j/m\}$ ($0 < j < m$)。则 $F(x_j-) \leq j/m \leq F(x_j)$ ，从而 $F(x_j-) - F(x_{j-1}) \leq 1/m$ 。对 $x \in [x_{j-1}, x_j)$ ， $F_n(x) - F(x) \leq F_n(x_j-) - F(x_{j-1}) \leq F_n(x_j-) - F(x_j-) + \frac{1}{m}$ ，类似地 $F_n(x) - F(x) \geq F_n(x_{j-1}) - F(x_{j-1}) - \frac{1}{m}$ 。因此 $\text{a.s. } \limsup_n \sup_x |F_n - F| \leq \frac{1}{m}$ 。第二个论断由定理 4.8(6)。

第5章 条件期望

条件期望 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 是“在已知子 σ -代数 $\mathcal{G}$ 所含信息时对 X 的最佳预测”。它是定义鞅与马氏过程所必需的工具。本章先由 L^2 中的正交投影定义它，再推广到可积与非负随机变量，然后系统地讨论它的性质与计算。

5.1 离散条件化

若 B 为事件且 $\mathbb{P}(B) > 0$ ，给定 B 的条件概率为 $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$ ， $X \in L^1$ 的条件期望为 $\mathbb{E}[X | B] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_B]/\mathbb{P}(B)$ 。若 Y 是取值于可数集 E 的随机变量，自然地定义

$$\mathbb{E}[X | Y] = \sum_{y: \mathbb{P}(Y=y) > 0} \mathbb{E}[X | Y=y] \mathbf{1}_{\{Y=y\}}.$$

这是一个 $\sigma(Y)$ -可测的随机变量，并且对每个 $A \in \sigma(Y)$ (即 $A = \{Y \in B\}$)，有 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y] \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A]$ 。这一性质将成为一般定义。

5.2 定义与存在性

在本章中 $\mathcal{G}$ 总表示 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数。 $L^p(\mathcal{G})$ 表示 $L^p(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 。

定理 5.1

(1) 设 $X \in L^1$ 。存在唯一 (在 a.s. 相等意义下) 的 $Z \in L^1(\mathcal{G})$ 使得

$$\mathbb{E}[X \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Z \mathbf{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{G}. \quad (5.1)$$

Z 记为 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ ，称为 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望。此时对一切有界 $\mathcal{G}$ -可测 W ， $\mathbb{E}[XW] = \mathbb{E}[ZW]$ 。

(2) 设 X 取值于 $[0, \infty]$ 。存在唯一 (a.s.) 的 $\mathcal{G}$ -可测、取值于 $[0, \infty]$ 的 Z 使 (5.1) 成立；仍记 $Z = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 。

此时对一切非负 $\mathcal{G}$ -可测 W ， $\mathbb{E}[XW] = \mathbb{E}[ZW]$ 。当 $X \in L^1$ 时两种定义一致。

(3) 若 $X \in L^2$ ，则 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 是 X 在闭子空间 $L^2(\mathcal{G})$ 上的正交投影。



证明 唯一性。若 Z, Z' 都 $\mathcal{G}$ -可测 (非负或可积) 且满足 (5.1)，对 $A = \{Z > a > Z'\} \in \mathcal{G}$ ($a \in \mathbb{Q}$) (在非负情形还限制在 $\{Z' \leq n\}$ 上) 得 $\mathbb{E}[(Z - Z') \mathbf{1}_A] = 0$ ，而 $Z - Z' > 0$ 于 A ，故 $\mathbb{P}(A) = 0$ 。对一切有理 a 取并，得 $Z \leq Z'$ a.s.；对称地 $Z = Z'$ a.s.

L^2 情形。 $L^2(\mathcal{G})$ 是完备的，因此是 $L^2(\mathcal{F})$ 的闭子空间。令 $Z = \Pi X$ 为正交投影。 $X - Z \perp \mathbf{1}_A$ 对 $A \in \mathcal{G}$ 正是 (5.1)。若 $X \geq 0$ ，则取 $A = \{Z < 0\}$ ， $\mathbb{E}[Z \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A] \geq 0$ ，故 $Z \geq 0$ a.s.：投影保持正性。于是对 $X \in L^2$ ， $|\Pi X| \leq \Pi |X|$ 且 $\mathbb{E}|\Pi X| \leq \mathbb{E}|\Pi |X|| = \mathbb{E}|X|$ 。

L^1 情形。 L^2 在 L^1 中稠密。若 $X_n \in L^2$ ， $X_n \rightarrow X$ 于 L^1 ，则 $\mathbb{E}|\Pi X_n - \Pi X_m| \leq \mathbb{E}|X_n - X_m|$ ，故 ΠX_n 在 $L^1(\mathcal{G})$ 中收敛到某个 Z ，对 (5.1) 取极限即得 Z 满足要求。

非负情形。令 $Z = \lim_n \uparrow \mathbb{E}[X \wedge n | \mathcal{G}]$ (由正性，序列 a.s. 递增)。由单调收敛定理对 (5.1) 取极限即可。

最后，关于 W 的论断：(5.1) 对 $\mathcal{G}$ -可测简单函数成立，再取极限 (单调收敛或控制收敛)。

对事件 A ，记 $\mathbb{P}(A | \mathcal{G}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A | \mathcal{G}]$ 。对随机变量 Y ，记 $\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[X | \sigma(Y)]$ ；由 Doob-Dynkin 引理 2.8，存在可测 h 使 $\mathbb{E}[X | Y] = h(Y)$ ，并常写 $\mathbb{E}[X | Y = y] = h(y)$ (它在 $\mathbb{P}_Y$ -a.e. 意义下唯一)。

5.3 条件期望的性质

命题 5.2

设 $X, Y \in L^1$ (或者都非负), $a, b \in \mathbb{R}$ (相应地 $a, b \geq 0$)。

1. $\mathbb{E}[aX + bY | \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$; $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$; $|\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X| | \mathcal{G}]$ 。
2. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$ 。
3. 若 X 是 $\mathcal{G}$ -可测的, $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = X$ 。
4. (提出已知量) 若 W 是 $\mathcal{G}$ -可测的且 $WX \in L^1$ (或 $W, X \geq 0$), 则 $\mathbb{E}[WX | \mathcal{G}] = W\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 。
5. (塔性质) 若 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, 则 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2] | \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1] | \mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1]$ 。
6. 若 $\sigma(X)$ 与 $\mathcal{G}$ 独立, 则 $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ 。更一般地, 若 $\mathcal{H}$ 是另一子 σ -代数且 $\sigma(\sigma(X), \mathcal{H})$ 与 $\mathcal{G}$ 独立, 则 $\mathbb{E}[X | \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X | \mathcal{H}]$ 。

证明 (1)–(3) 由定义与唯一性直接验证 (单调性: 对 $A = \{\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] > \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]\}$ 用 (5.1))。(4) 先对非负 W, X : 对 $A \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}[WX \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] W \mathbf{1}_A]$ (定理 5.1(2) 中关于 W 的论断), 故成立。一般情形对正负部展开 ($|W\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|WX| | \mathcal{G}]$ 保证可积)。(5) $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1]$ 是 $\mathcal{G}_2$ -可测的, 由 (3) 得第二个等式。对 $A \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2] \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1] \mathbf{1}_A]$, 得第一个。(6) 第一部分: 对 $A \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}[X \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X] \mathbb{P}(A)$ 。第二部分: 不妨设 $X \geq 0$ 。形如 $G \cap H$ ($G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$) 的集合构成生成 $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ 的 π -系, 且

$$\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{G \cap H}] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_H] \mathbb{P}(G) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{H}] \mathbf{1}_H] \mathbb{P}(G) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{H}] \mathbf{1}_H \mathbf{1}_G],$$

其中两次用了独立性 ($X \mathbf{1}_H$ 与 $\mathbb{E}[X | \mathcal{H}] \mathbf{1}_H$ 都是 $\sigma(\sigma(X), \mathcal{H})$ -可测的)。两边作为 A 的函数 $A \mapsto \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A]$ 与 $A \mapsto \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{H}] \mathbf{1}_A]$ 都是有限测度 (在 $X \in L^1$ 时; 非负情形先对 $X \wedge n$ 证明), 由推论 1.7 在 $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ 上相等。

命题 5.3 (条件形式的极限定理与不等式)

1. (单调收敛) 若 $0 \leq X_n \uparrow X$, 则 $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] \uparrow \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 。
2. (Fatou) 若 $X_n \geq 0$, 则 $\mathbb{E}[\liminf X_n | \mathcal{G}] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}]$ 。
3. (控制收敛) 若 $X_n \rightarrow X$ a.s. 且 $|X_n| \leq Y \in L^1$, 则 $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] \rightarrow \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ a.s. 且于 L^1 。
4. (Jensen) 若 φ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数, $X, \varphi(X) \in L^1$, 则 $\varphi(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) | \mathcal{G}]$ 。
5. 对 $p \geq 1$, $\|\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]\|_p \leq \|X\|_p$ 。

证明 (1) $Z = \lim \uparrow \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}]$ 存在且 $\mathcal{G}$ -可测; 由单调收敛, 对 $A \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}[Z \mathbf{1}_A] = \lim \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A]$ 。(2) 用 (1) 于 $\inf_{k \geq n} X_k$ 。(3) 令 $Z_n = \sup_{k \geq n} |X_k - X| \leq 2Y$, $Z_n \downarrow 0$; 由 (1) 应用于 $2Y - Z_n$, $\mathbb{E}[Z_n | \mathcal{G}] \downarrow 0$ a.s., 而 $|\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[Z_n | \mathcal{G}]$ 。 L^1 收敛由 $\mathbb{E}|\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}|X_n - X|$ 与控制收敛。(4) 如命题 2.5 的证明, $\varphi = \sup_n \ell_n$, ℓ_n 为可数个仿射函数。对每个 n , $\mathbb{E}[\varphi(X) | \mathcal{G}] \geq \ell_n(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}])$ a.s.; 可数个零测集之并仍是零测集。(5) 对 $\varphi(x) = |x|^p$ 用 (4), 再取期望 ($X \in L^p$ 时; 否则右边为 ∞)。

命题 5.4

若 $X \in L^1$, 则族 $\{\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] : \mathcal{G} \text{ 为 } \mathcal{F} \text{ 的子 } \sigma\text{-代数}\}$ 是一致可积的。

证明 记 $X_{\mathcal{G}} = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ 。由命题 4.4(3), 对 $\varepsilon > 0$ 取 δ 使 $\mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}[|X| \mathbf{1}_A] < \varepsilon$ 。取 $a = \mathbb{E}|X|/\delta$ 。则 $\mathbb{P}(|X_{\mathcal{G}}| > a) \leq \mathbb{E}|X|/a = \delta$, 而 $\{|X_{\mathcal{G}}| > a\} \in \mathcal{G}$, 故 $\mathbb{E}[|X_{\mathcal{G}}| \mathbf{1}_{\{|X_{\mathcal{G}}| > a\}}] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| | \mathcal{G}] \mathbf{1}_{\{|X_{\mathcal{G}}| > a\}}] = \mathbb{E}[|X| \mathbf{1}_{\{|X_{\mathcal{G}}| > a\}}] < \varepsilon$ 。

引理 5.5 (冻结引理)

设 X 取值于 $(E, \mathcal{E})$ 且是 $\mathcal{G}$ -可测的, Y 取值于 $(F, \mathcal{F}')$ 且与 $\mathcal{G}$ 独立, $f : E \times F \rightarrow [0, \infty]$ 可测。则

$$\mathbb{E}[f(X, Y) | \mathcal{G}] = \Phi(X), \quad \Phi(x) := \mathbb{E}[f(x, Y)] = \int f(x, y) \mathbb{P}_Y(dy).$$

对有界可测 f 同样成立。

证明 Φ 由 Tonelli 定理可测。对 $A \in \mathcal{G}$, $(X, \mathbf{1}_A)$ 与 Y 独立, 故由定理 3.4,

$$\mathbb{E}[f(X, Y)\mathbf{1}_A] = \iint f(x, y) a \mathbb{P}_{(X, \mathbf{1}_A)}(dx da) \mathbb{P}_Y(dy) = \mathbb{E}[\Phi(X)\mathbf{1}_A].$$

5.4 条件期望的计算

设 (X, Y) 取值于 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, 有联合密度 $p(x, y)$ 。令 $q(y) = \int p(x, y) dx$ 为 Y 的密度。对非负可测 h ,

$$\mathbb{E}[h(X) | Y] = \int h(x) \nu(Y, dx), \quad \nu(y, dx) = \frac{p(x, y)}{q(y)} dx \quad (q(y) > 0),$$

其中当 $q(y) = 0$ 时令 $\nu(y, \cdot)$ 为任一固定的概率测度。事实上, 对非负可测 g , 由 Fubini,

$$\mathbb{E}[h(X)g(Y)] = \int g(y) \left(\int h(x) p(x, y) dx \right) dy = \int g(y) q(y) \left(\int h(x) \nu(y, dx) \right) dy,$$

而 $\{q = 0\}$ 是 $\mathbb{P}_Y$ -零集。

命题 5.6

设 $(X, Y_1, \dots, Y_p)$ 是中心化高斯向量 (X 为实值)。则 $\mathbb{E}[X | Y_1, \dots, Y_p]$ 等于 X 在 L^2 中向子空间 $\text{span}\{Y_1, \dots, Y_p\}$ 的正交投影 $\hat{X} = \sum_j a_j Y_j$; 并且对非负可测 h ,

$$\mathbb{E}[h(X) | Y_1, \dots, Y_p] = \int h(\hat{X} + z) \mathcal{N}(0, \sigma^2)(dz), \quad \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2].$$

证明 $(X - \hat{X}, Y_1, \dots, Y_p)$ 是 (X, Y) 的线性像, 因而是高斯向量, 且 $\text{Cov}(X - \hat{X}, Y_j) = 0$ 。由命题 3.17(4), $X - \hat{X}$ 与 $(Y_1, \dots, Y_p)$ 独立, 且 $X - \hat{X} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 。由 $X = \hat{X} + (X - \hat{X})$ 与冻结引理 5.5 即得两个结论。

例 5.1 (Kalman 滤波) 设 $X_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$, $X_{n+1} = aX_n + \varepsilon_{n+1}$ (信号), $Y_n = X_n + \eta_n$ (观测), 其中 $X_0, (\varepsilon_n), (\eta_n)$ 独立, $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, s^2)$, $\eta_n \sim \mathcal{N}(0, r^2)$ 。令 $\hat{X}_n = \mathbb{E}[X_n | Y_0, \dots, Y_n]$, $P_n = \mathbb{E}[(X_n - \hat{X}_n)^2]$ 。所有变量构成高斯空间, 由命题 5.6, $\hat{X}_n$ 是正交投影。记 $\tilde{X}_{n+1} = a\hat{X}_n$ (预测), $\tilde{P}_{n+1} = a^2 P_n + s^2$ 。新息 $I_{n+1} = Y_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}$ 与 $Y_0, \dots, Y_n$ 正交, 且 $\text{span}(Y_0, \dots, Y_{n+1}) = \text{span}(Y_0, \dots, Y_n) \oplus \text{span}(I_{n+1})$, 故

$$\hat{X}_{n+1} = \tilde{X}_{n+1} + K_{n+1} I_{n+1}, \quad K_{n+1} = \frac{\tilde{P}_{n+1}}{\tilde{P}_{n+1} + r^2}, \quad P_{n+1} = (1 - K_{n+1}) \tilde{P}_{n+1}$$

($K_{n+1} = \text{Cov}(X_{n+1}, I_{n+1}) / \text{Var}(I_{n+1})$, 因 $X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}$ 与 η_{n+1} 独立且与 $Y_0, \dots, Y_n$ 正交)。并且给定 $Y_0, \dots, Y_n$, X_n 的条件分布是 $\mathcal{N}(\hat{X}_n, P_n)$ 。这是条件期望在信号处理中的经典应用: 最优估计可以递推地计算。

这个命题说明: 对高斯向量, “最佳预测”(条件期望) 与 “最佳线性预测” 一致。这一事实在第 9 章讨论高斯空间时会再次出现。

5.5 转移核与条件分布

定义 5.7 (转移核)

设 $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F}')$ 为可测空间。映射 $\nu: E \times \mathcal{F}' \rightarrow [0, 1]$ 称为从 E 到 F 的转移核 (或转移概率), 若: (i) 对每个 $x \in E$, $\nu(x, \cdot)$ 是 F 上的概率测度; (ii) 对每个 $B \in \mathcal{F}'$, $x \mapsto \nu(x, B)$ 是可测的。

由单调类论证, 对非负可测 $f: E \times F \rightarrow [0, \infty]$, $x \mapsto \int f(x, y) \nu(x, dy)$ 可测; 对 E 上的概率测度 μ , $\mu \otimes \nu(A \times B) := \int_A \nu(x, B) \mu(dx)$ 唯一延拓为 $E \times F$ 上的概率测度, 且 $\int f d(\mu \otimes \nu) = \int \mu(dx) \int \nu(x, dy) f(x, y)$ 。(证明: 上述公式对 $f = \mathbf{1}_{A \times B}$ 成立; 满足 “ $x \mapsto \int f(x, y) \nu(x, dy)$ 可测” 的有界 f 构成满足定理 1.8 条件的向量空间; 然后由单调收敛延拓到非负函数, 并用它定义 $\mu \otimes \nu$ 。)

定义 5.8 (条件分布)

设 X 取值于 E , Y 取值于 F 。从 E 到 F 的转移核 ν 称为给定 X 时 Y 的条件分布, 若对一切非负可测 $h: F \rightarrow [0, \infty]$,

$$\mathbb{E}[h(Y) | X] = \int h(y) \nu(X, dy) \quad \text{a.s.}$$

等价地, (X, Y) 的分布是 $\mathbb{P}_X \otimes \nu$; 此时对非负可测 f , $\mathbb{E}[f(X, Y) | X] = \int f(X, y) \nu(X, dy)$ 。

**定理 5.9**

若 Y 是实随机变量, X 取值于任意可测空间 E , 则给定 X 时 Y 的条件分布存在, 并且在 $\mathbb{P}_X$ -a.e. 意义下唯一。



证明 对每个 $r \in \mathbb{Q}$ 选取 $\mathbb{P}(Y \leq r | X)$ 的一个版本 $g_r(X)$ (g_r 可测, Doob–Dynkin)。由条件期望的单调性与单调收敛, 存在 $\mathbb{P}_X$ -零集 N , 使对 $x \notin N$: $r \mapsto g_r(x)$ 不减, $\lim_{r \rightarrow -\infty} g_r(x) = 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} g_r(x) = 1$, 且 $g_r(x) = \lim_{s \downarrow r, s \in \mathbb{Q}} g_s(x)$ (每条都是关于可数个有理数的可数个 a.s. 等式/不等式)。对 $x \notin N$ 令 $F_x(t) = \inf_{r > t, r \in \mathbb{Q}} g_r(x)$, 它是一个分布函数, 在有理点上等于 $g_r(x)$; 令 $\nu(x, \cdot)$ 为相应的概率测度 (定理 1.13); 对 $x \in N$ 令 $\nu(x, \cdot) = \delta_0$ 。

$x \mapsto \nu(x, (-\infty, t])$ 可测 (有理点值的下确界), 而使 $x \mapsto \nu(x, B)$ 可测的 B 全体是 λ -系, 故 ν 是转移核。 $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y \in B\}} \mathbf{1}_{\{X \in A\}}] = \mathbb{E}[\nu(X, B) \mathbf{1}_{\{X \in A\}}]$ 对 $B = (-\infty, r]$ ($r \in \mathbb{Q}$) 成立, 再由 λ -系论证对一切 Borel B 成立; 最后对 h 用简单函数逼近与单调收敛。唯一性: 两个条件分布对每个 $B = (-\infty, r]$ ($r \in \mathbb{Q}$) 在 $\mathbb{P}_X$ -a.e. 意义下相等, 取可数个零测集之并, 再用推论 1.7。

注 同样的结论对取值于任意 Polish 空间的 Y 成立 (可以用 Borel 同构把它化为实值情形), 本讲义不需要这一推广。

第二部分

离散时间随机过程

第 6 章 离散时间鞅

鞅是“公平博弈中赌徒财富”的数学模型，是现代概率论中最有力的工具之一：几乎所有的概率问题都可以通过找到合适的鞅来解决。本章建立离散时间鞅的基本理论：停时与可选停止定理、几乎必然收敛定理、 L^p 收敛与一致可积鞅、反向鞅。这些结果在后面的马氏链理论与连续时间理论中被反复使用。

6.1 定义与例子

定义 6.1

滤子（或信息流）是 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数的递增序列 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 。记 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$ 。随机过程 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 称为适应的，若每个 X_n 是 $\mathcal{F}_n$ -可测的；称为可料的，若 X_0 是 $\mathcal{F}_0$ -可测的且每个 X_n ($n \geq 1$) 是 $\mathcal{F}_{n-1}$ -可测的。适应的实过程 (X_n) ，若每个 $X_n \in L^1$ ，并且对一切 n ：

- $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ ，称为鞅；
- $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n$ ，称为上鞅；
- $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n$ ，称为下鞅。



由塔性质，鞅满足 $\mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}_n] = X_n$ ($m \geq n$)，从而 $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$ ；上鞅的期望递减。 X 是上鞅当且仅当 $-X$ 是下鞅。若不指明滤子，默认使用自然滤子 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ 。

例 6.1

1. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 独立可积，与 $\mathcal{F}_0$ 独立， $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{F}_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ 。若 $\mathbb{E}\xi_k = 0$ ，则 $S_n = S_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$ ($S_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$) 是鞅；若 $\mathbb{E}\xi_k \leq 0$ ，是上鞅。若还有 $\xi_k \in L^2$ ， $\mathbb{E}\xi_k = 0$ ， $\text{Var } \xi_k = \sigma^2$ ，则 $S_n^2 - n\sigma^2$ 是鞅。
2. 若 $\xi_k \geq 0$ 独立且 $\mathbb{E}\xi_k = 1$ ，则 $\prod_{k \leq n} \xi_k$ 是鞅。
3. (闭鞅) 若 $Z \in L^1$ ，则 $X_n = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_n]$ 是鞅（塔性质）。
4. 若 X 是鞅， φ 凸且 $\varphi(X_n) \in L^1$ ，则 $\varphi(X_n)$ 是下鞅（条件 Jensen 不等式）；若 X 是下鞅且 φ 凸不减，结论同样成立。特别地 $|X_n|$ 、 X_n^+ 与（当 $X_n \in L^2$ 时） X_n^2 是下鞅。

定义 6.2 (鞅变换)

设 X 适应， H 可料。定义 $(H \cdot X)_0 = 0$ ， $(H \cdot X)_n = \sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1})$ 。



命题 6.3

若 X 是鞅（上鞅）， H 可料、有界（且非负），则 $H \cdot X$ 是鞅（上鞅）。



证明 $\mathbb{E}[(H \cdot X)_{n+1} - (H \cdot X)_n | \mathcal{F}_n] = H_{n+1} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n]$ ，它 = 0（相应地 ≤ 0 ）。

这就是“没有赌博策略能战胜公平博弈”： H_k 是第 k 局的下注额，只能依赖于前 $k-1$ 局的信息。

命题 6.4 (Doob 分解)

设 X 是适应可积过程。则 X 唯一地分解为 $X_n = X_0 + M_n + A_n$ ，其中 M 是鞅， $M_0 = 0$ ， A 可料， $A_0 = 0$ 。 X 是下鞅当且仅当 A 不减。



证明 必然有 $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}]$ ，这同时给出存在性与唯一性。

若 M 是 $M_0 = 0$ 的平方可积鞅， M^2 的 Doob 分解中的可料不减过程记为 $\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$ ，它使 $M^2 - \langle M \rangle$ 成为鞅。这是第 11 章二次变差的离散类比。

6.2 停时与可选停止

定义 6.5

随机变量 $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 称为 (关于 $(\mathcal{F}_n)$ 的) 停时, 若对一切 $n \in \mathbb{N}$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ (等价地 $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$)。停时前的 σ -代数

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$



例如, 若 X 适应, B 可测, 则首中时 $T_B = \inf\{n \geq 0 : X_n \in B\}$ ($\inf \emptyset = \infty$) 是停时。常数是停时。

命题 6.6

设 S, T 为停时。

1. $S \wedge T, S \vee T, S + T$ 是停时; T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的。
2. 若 $S \leq T$, 则 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ 。一般地 $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, 且 $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$ 。
3. 若 X 适应, 则 $X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}$ 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的; 若 X_∞ 是 $\mathcal{F}_\infty$ -可测的, 则 X_T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的。



证明 (1) $\{S \wedge T \leq n\} = \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\}$ 等; $\{S + T = n\} = \bigcup_{k \leq n} \{S = k, T = n - k\}$ 。 $\{T = m\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ 。
 (2) 若 $A \in \mathcal{F}_S$, $A \cap \{T = n\} = \bigcup_{k \leq n} (A \cap \{S = k\}) \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ 。由此 $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subset \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$; 反之若 $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, $A \cap \{S \wedge T \leq n\} = (A \cap \{S \leq n\}) \cup (A \cap \{T \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$ 。 $\{S \leq T\} \cap \{S \wedge T = n\} = \{S = n\} \cap \{T \geq n\} \in \mathcal{F}_n$ 。
 (3) $\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ 。

对过程 X 与停时 T , 停止过程 $X_n^T = X_{T \wedge n}$ 。由于 $X^T = X_0 + H \cdot X$, 其中 $H_k = \mathbf{1}_{\{T \geq k\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{T \leq k-1\}}$ 可料, 由命题 6.3, 鞅 (上鞅) 的停止过程是鞅 (上鞅)。

定理 6.7 (有界停时的可选停止定理)

设 X 为鞅 (上鞅), $S \leq T \leq N$ 为有界停时。则 $X_T \in L^1$ 且 $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S$ (相应地 $\leq X_S$)。特别地 $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ (相应地 $\leq$)。



证明 $|X_T| \leq \sum_{k \leq N} |X_k|$ 可积。先证 $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_S] (\leq)$: $X_T - X_S = \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{S < k \leq T\}} (X_k - X_{k-1}) = (H \cdot X)_N$, $H_k = \mathbf{1}_{\{S < k \leq T\}} = \mathbf{1}_{\{S \leq k-1\}} \mathbf{1}_{\{T \leq k-1\}^c}$ 可料、非负、有界, 用命题 6.3。对 $A \in \mathcal{F}_S$, $S^A = S \mathbf{1}_A + N \mathbf{1}_{A^c}$ 与 $T^A = T \mathbf{1}_A + N \mathbf{1}_{A^c}$ 是停时 ($\{S^A \leq n\} = (A \cap \{S \leq n\}) \cup (A^c \cap \{N \leq n\})$), 并注意 $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$, 且 $S^A \leq T^A \leq N$ 。于是 $\mathbb{E}[X_{T^A}] = \mathbb{E}[X_{S^A}] (\leq)$, 即 $\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_S \mathbf{1}_A] (\leq)$ 。由于 X_S 是 $\mathcal{F}_S$ -可测的, 结论得证 (对上鞅, 令 $A = \{\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] > X_S\}$)。

6.3 最大不等式与几乎必然收敛

定理 6.8 (Doob 最大不等式)

设 X 为下鞅, $\lambda > 0$, $X_n^* = \max_{k \leq n} X_k$ 。则

$$\lambda \mathbb{P}(X_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{X_n^* \geq \lambda\}}] \leq \mathbb{E}[X_n^+].$$

若 X 是鞅或非负下鞅, 则 $\lambda \mathbb{P}(\max_{k \leq n} |X_k| \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[|X_n|]$ 。



证明 令 $T = \inf\{k : X_k \geq \lambda\} \wedge n$ 。由定理 6.7 (下鞅版本, $T \leq n$), $\mathbb{E}[X_n] \geq \mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{X_n^* \geq \lambda\}}] + \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}] \geq \lambda \mathbb{P}(X_n^* \geq \lambda) + \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}]$ 。第二个论断把第一个用于下鞅 $|X_n|$ 。

对实数列 (x_n) 与 $a < b$, 定义 $x_0, \dots, x_n$ 对 $[a, b]$ 的上穿次数 $U_n[a, b]$ 为满足以下条件的最大整数 k : 存在 $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_k < t_k \leq n$, $x_{s_i} \leq a$, $x_{t_i} \geq b$ 。记 $U_\infty[a, b] = \lim_n \uparrow U_n[a, b]$ 。

引理 6.9

实数列 (x_n) 在 $[-\infty, \infty]$ 中收敛, 当且仅当对一切有理数 $a < b$, $U_\infty[a, b] < \infty$.

证明 若 $\liminf x_n < a < b < \limsup x_n$, 则 $U_\infty[a, b] = \infty$; 反之若 $U_\infty[a, b] = \infty$, 则 $\liminf x_n \leq a < b \leq \limsup x_n$.

定理 6.10 (Doob 上穿不等式)

设 X 为上鞅, $a < b$. 则

$$(b-a)\mathbb{E}[U_n[a, b]] \leq \mathbb{E}[(X_n - a)^-].$$

特别地, 若 $X \geq 0$, 则 $\mathbb{E}[U_n[a, b]] \leq a/(b-a)$.

证明 定义可料过程 H : 令 $\tau_0 = 0$, $\sigma_k = \inf\{m \geq \tau_{k-1} : X_m \leq a\}$, $\tau_k = \inf\{m \geq \sigma_k : X_m \geq b\}$, 它们都是停时; 令 $H_m = \sum_k \mathbf{1}_{\{\sigma_k < m \leq \tau_k\}}$ (取值于 $\{0, 1\}$, 可料)。在时刻 n , $(H \cdot X)_n$ 是 $U_n[a, b]$ 个完整上穿的增量 (每个 $\geq b-a$) 加上可能存在的最后一段未完成上穿的增量 $X_n - X_{\sigma_k} \geq X_n - a \geq -(X_n - a)^-$. 故 $(H \cdot X)_n \geq (b-a)U_n[a, b] - (X_n - a)^-$. 由命题 6.3, $\mathbb{E}[(H \cdot X)_n] \leq 0$.

定理 6.11 (鞅收敛定理)

设 X 为上鞅且 $\sup_n \mathbb{E}[X_n^-] < \infty$ (等价地 $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$, 因为 $\mathbb{E}X_n^+ = \mathbb{E}X_n + \mathbb{E}X_n^- \leq \mathbb{E}X_0 + \mathbb{E}X_n^-$). 则 X_n a.s. 收敛到某个 $X_\infty \in L^1$. 对下鞅 (条件为 $\sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty$) 与鞅 (条件为 $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$) 同样成立. 特别地, 非负上鞅 a.s. 收敛, 且 $\mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_n] \leq X_n$.

证明 由定理 6.10 与单调收敛, $\mathbb{E}[U_\infty[a, b]] \leq \sup_n \mathbb{E}[(X_n - a)^-]/(b-a) \leq (\sup_n \mathbb{E}X_n^- + |a|)/(b-a) < \infty$, 故对一切有理 $a < b$, $U_\infty[a, b] < \infty$ a.s. 由引理 6.9, X_n a.s. 在 $[-\infty, \infty]$ 中收敛; 由 Fatou 引理 $\mathbb{E}|X_\infty| \leq \liminf \mathbb{E}|X_n| < \infty$, 故 X_∞ 有限 a.s. 下鞅情形考虑 $-X$. 非负上鞅的最后一个论断由条件 Fatou 引理: $\mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_n] \leq \liminf_m \mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}_n] \leq X_n$.

注 L^1 有界不足以保证 L^1 收敛: 在例 6.1(2) 中取 $\mathbb{P}(\xi_k = 0) = \mathbb{P}(\xi_k = 2) = \frac{1}{2}$, 则 $X_n = \prod_{k \leq n} \xi_k \rightarrow 0$ a.s., 但 $\mathbb{E}X_n = 1$.

6.4 L^p 有界的鞅

定理 6.12 (Doob L^p 不等式)

设 X 为鞅或非负下鞅, $p > 1$. 则

$$\mathbb{E}\left[\max_{k \leq n} |X_k|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_n|^p].$$

证明 记 $Y = \max_{k \leq n} |X_k|$, $Z = |X_n|$. 由定理 6.8 (用于非负下鞅 $|X|$), $\lambda \mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[Z \mathbf{1}_{\{Y \geq \lambda\}}]$. 乘以 $p\lambda^{p-2}$ 并对 $\lambda \in (0, \infty)$ 积分 (Fubini):

$$\mathbb{E}[Y^p] = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mathbb{P}(Y \geq \lambda) d\lambda \leq \int_0^\infty p\lambda^{p-2} \mathbb{E}[Z \mathbf{1}_{\{Y \geq \lambda\}}] d\lambda = \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[ZY^{p-1}] \leq \frac{p}{p-1} \|Z\|_p \|Y\|_p^{p-1}.$$

由于 $Y \leq \sum_{k \leq n} |X_k| \in L^p$ (若 $\mathbb{E}Z^p = \infty$ 无需证明), $\|Y\|_p < \infty$, 两边除以 $\|Y\|_p^{p-1}$ 即可.

定理 6.13

设 X 为鞅, $p > 1$, $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty$. 则 $X_n \rightarrow X_\infty$ a.s. 且于 L^p , $\mathbb{E}[\sup_n |X_n|^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}|X_\infty|^p$, 且 $X_n = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_n]$.

证明 由定理 6.11, $X_n \rightarrow X_\infty$ a.s. 由定理 6.12 与单调收敛, $\sup_n |X_n| \in L^p$, 由控制收敛得 L^p 收敛与最大不

等式。最后, 对 $A \in \mathcal{F}_n$, $\mathbb{E}[X_\infty \mathbf{1}_A] = \lim_m \mathbb{E}[X_m \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A]$ 。

对平方可积鞅, 增量 $X_k - X_{k-1}$ 在 L^2 中两两正交, 故 $\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_0^2] + \sum_{k \leq n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$, 于是 X 在 L^2 中有界当且仅当 $\sum_k \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] < \infty$ 。

推论 6.14 (随机级数)

设 ξ_n 独立, $\mathbb{E}\xi_n = 0$, $\sum_n \mathbb{E}[\xi_n^2] < \infty$ 。则 $\sum_n \xi_n$ a.s. 且于 L^2 收敛。



6.5 一致可积鞅与可选停止

定理 6.15

对鞅 X , 以下等价: (1) X 一致可积; (2) X_n a.s. 且于 L^1 收敛; (3) 存在 $Z \in L^1$ 使 $X_n = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_n]$ 对一切 n 成立。此时 $X_\infty = \lim X_n = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_\infty]$ 。



证明 (1) $\Rightarrow$ (2): UI 族 L^1 有界, 由定理 6.11 a.s. 收敛, 再由 Vitali 定理 4.5 得 L^1 收敛。(2) $\Rightarrow$ (3): $Z = X_\infty$, 对 $A \in \mathcal{F}_n$, $\mathbb{E}[X_\infty \mathbf{1}_A] = \lim_m \mathbb{E}[X_m \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A]$ 。(3) $\Rightarrow$ (1): 命题 5.4。最后, $\mathbb{E}[X_\infty \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Z \mathbf{1}_A]$ 对 $A \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ 成立, 后者是生成 $\mathcal{F}_\infty$ 的 π -系, 由 λ -系论证 (对 $Z^\pm$ 等分别考虑有限测度) 对一切 $A \in \mathcal{F}_\infty$ 成立; 而 X_∞ 是 $\mathcal{F}_\infty$ -可测的。

推论 6.16 (Lévy 上升定理)

若 $Z \in L^1$, 则 $\mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_n] \rightarrow \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_\infty]$ a.s. 且于 L^1 。特别地, 若 $A \in \mathcal{F}_\infty$, 则 $\mathbb{P}(A | \mathcal{F}_n) \rightarrow \mathbf{1}_A$ a.s.



定理 6.17 (一致可积鞅的可选停止定理)

设 X 为一致可积鞅, $X_\infty = \lim X_n$ 。则对任意停时 T , $X_T \in L^1$ 且 $X_T = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_T]$; 若 $S \leq T$ 为停时, 则 $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S$ 。



证明 对 $A \in \mathcal{F}_T$, $\mathbb{E}[X_\infty \mathbf{1}_{A \cap \{T=n\}}] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{A \cap \{T=n\}}] = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{A \cap \{T=n\}}]$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), 求和得 $\mathbb{E}[X_\infty \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_A]$ 。由于 $|X_T| \mathbf{1}_{\{T=n\}} \leq \mathbb{E}[|X_\infty| | \mathcal{F}_n] \mathbf{1}_{\{T=n\}}$, 得 $\mathbb{E}|X_T| \leq \mathbb{E}|X_\infty|$ (求和交换由单调收敛保证)。 X_T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的, 故 $X_T = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_T]$ 。第二个论断由塔性质与 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ 。

定理 6.18 (非负上鞅的可选停止定理)

设 X 为非负上鞅, $X_\infty = \lim X_n$ (定理 6.11)。则对停时 $S \leq T$, $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \leq X_S$ 。特别地 $\mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[X_0]$ 。



证明 对 $A \in \mathcal{F}_S$ 与 $n \in \mathbb{N}$, 由定理 6.7 (停时 $S \wedge n \leq T \wedge n$, $A \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_{S \wedge n}$), $\mathbb{E}[X_{T \wedge n} \mathbf{1}_{A \cap \{S \leq n\}}] \leq \mathbb{E}[X_{S \wedge n} \mathbf{1}_{A \cap \{S \leq n\}}] = \mathbb{E}[X_S \mathbf{1}_{A \cap \{S \leq n\}}]$ 。左边 $\geq \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{A \cap \{T \leq n\}}]$ 。令 $n \rightarrow \infty$ (单调收敛) 得 $\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}}] \leq \mathbb{E}[X_S \mathbf{1}_{A \cap \{S < \infty\}}]$ 。在 $\{S = \infty\}$ 上 $X_T = X_S = X_\infty$ 。合并得 $\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[X_S \mathbf{1}_A]$ 。

例 6.2 (赌徒破产) 设 $S_n = k + \xi_1 + \dots + \xi_n$, ξ_i 独立同分布, $\mathbb{P}(\xi_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $0 < k < N$, $T = \inf\{n : S_n \in \{0, N\}\}$ 。由 Borel-Cantelli 可知 $T < \infty$ a.s. (任何连续 N 步都向上的概率为 2^{-N} , 不相交的长 N 的区间段是独立的)。停止鞅 S^T 有界, 因而一致可积, 于是 $\mathbb{E}[S_T] = k$, 即 $\mathbb{P}(S_T = N) = k/N$ 。再对鞅 $S_n^2 - n$ 用有界停时 $T \wedge n$ 并令 $n \rightarrow \infty$ (单调收敛与控制收敛), 得 $\mathbb{E}[T] = k(N - k)$ 。

6.6 反向鞅

定义 6.19

设 $(\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ 是以非正整数为指标的递增子 σ -代数族 (即 $\mathcal{G}_{-1} \supset \mathcal{G}_{-2} \supset \cdots$ 向过去递减), 记 $\mathcal{G}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{G}_n$. 适应可积过程 $(X_n)_{n \leq 0}$ 若满足 $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n] = X_n$ ($n \leq -1$), 称为反向鞅。

定理 6.20

反向鞅 $(X_n)_{n \leq 0}$ 在 $n \rightarrow -\infty$ 时 a.s. 且于 L^1 收敛到 $X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0 | \mathcal{G}_{-\infty}]$.

证明 $X_n = \mathbb{E}[X_0 | \mathcal{G}_n]$, 由命题 5.4, (X_n) 一致可积。对固定的 N , $(X_{-N+k})_{0 \leq k \leq N}$ 是关于 $(\mathcal{G}_{-N+k})$ 的鞅, 它当然也是上鞅, 由定理 6.10, 其对 $[a, b]$ 的上穿次数 $U^{(N)}$ 满足 $(b-a)\mathbb{E}[U^{(N)}] \leq \mathbb{E}[(X_0 - a)^-] \leq \mathbb{E}|X_0| + |a|$, 而 $U^{(N)}$ 随 N 递增, 其极限是序列 $X_0, X_{-1}, X_{-2}, \dots$ 的“反向”穿越次数。令 $N \rightarrow \infty$, 可知 X_n 当 $n \rightarrow -\infty$ 时对每个有理区间只有有限次穿越, 由引理 6.9 a.s. 收敛到某个 $X_{-\infty}$ (L^1 有界保证有限)。由 Vitali 定理, 收敛也在 L^1 中。 $X_{-\infty}$ 关于每个 $\mathcal{G}_n$ 可测, 因而关于 $\mathcal{G}_{-\infty}$ 可测; 对 $A \in \mathcal{G}_{-\infty} \subset \mathcal{G}_n$, $\mathbb{E}[X_0 \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A] \rightarrow \mathbb{E}[X_{-\infty} \mathbf{1}_A]$ 。

定理 6.21 (强大数定律, 鞅证明)

设 $(\xi_n)_{n \geq 1}$ 独立同分布可积, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. 则 $S_n/n \rightarrow \mathbb{E}\xi_1$ a.s. 且于 L^1 .

证明 令 $\mathcal{G}_{-n} = \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots) = \sigma(S_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$. 由对称性, 对 $k \leq n$, $(\xi_k, S_n, \xi_{n+1}, \dots)$ 与 $(\xi_1, S_n, \xi_{n+1}, \dots)$ 同分布, 故 $\mathbb{E}[\xi_k | \mathcal{G}_{-n}] = \mathbb{E}[\xi_1 | \mathcal{G}_{-n}]$ (条件期望由联合分布决定, 见 Doob–Dynkin 引理)。对 k 求和得 $\mathbb{E}[S_n | \mathcal{G}_{-n}] = S_n/n$. 故 (S_n/n) 是反向鞅 (指标 $-n$), 由定理 6.20 a.s. 且于 L^1 收敛到某个 L . $L = \limsup S_n/n$ 关于 (ξ_n) 的尾 σ -代数可测, 由 Kolmogorov 0-1 律它 a.s. 为常数, 而 $\mathbb{E}L = \lim \mathbb{E}[S_n/n] = \mathbb{E}\xi_1$.

注 证明中“由对称性”一步的细节: 若 $(U, V) \stackrel{(d)}{=} (U', V)$, $U, U' \in L^1$, 则 $\mathbb{E}[U | V] = \mathbb{E}[U' | V]$. 确实, $\mathbb{E}[U \mathbf{1}_{\{V \in B\}}] = \mathbb{E}[U' \mathbf{1}_{\{V \in B\}}]$. 这里 $V = (S_n, \xi_{n+1}, \dots)$ 取值于 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

6.7 若干应用

命题 6.22 (Wald 恒等式)

设 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 独立同分布可积, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$, T 是满足 $\mathbb{E}T < \infty$ 的停时。则 $\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T] \mathbb{E}\xi_1$. 若还有 $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\mathbb{E}\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$, 则 $\mathbb{E}[S_T^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[T]$.

证明 记 $m = \mathbb{E}\xi_1$. $S_n - nm$ 是鞅, 由定理 6.7, $\mathbb{E}[S_{T \wedge n}] = m\mathbb{E}[T \wedge n]$. 由于 $\{T \geq k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$ 与 ξ_k 独立, $\mathbb{E}[\sum_{k \leq T} |\xi_k|] = \sum_k \mathbb{E}[|\xi_k| \mathbf{1}_{\{T \geq k\}}] = \mathbb{E}[\xi_1] \mathbb{E}[T] < \infty$, 而 $|S_{T \wedge n}| \leq \sum_{k \leq T} |\xi_k|$, 由控制收敛令 $n \rightarrow \infty$ 即得第一个等式。第二个: $S_n^2 - n\sigma^2$ 是鞅, 故 $\mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[T \wedge n] \leq \sigma^2 \mathbb{E}T$. 于是 S^T 是 L^2 有界鞅, 由定理 6.13 它于 L^2 收敛到 S_T , 令 $n \rightarrow \infty$ 即得。

定理 6.23 (Azuma–Hoeffding 不等式)

设 M 是鞅, $|M_k - M_{k-1}| \leq c_k$ (常数)。则对 $x > 0$,

$$\mathbb{P}(M_n - M_0 \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2 \sum_{k \leq n} c_k^2}\right).$$

证明 若 $\mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] = 0$ 且 $|Y| \leq c$, 则由 $y \mapsto e^{\lambda y}$ 在 $[-c, c]$ 上的凸性, $e^{\lambda Y} \leq \frac{c-Y}{2c} e^{-\lambda c} + \frac{c+Y}{2c} e^{\lambda c}$, 取条件期望得 $\mathbb{E}[e^{\lambda Y} | \mathcal{G}] \leq \cosh(\lambda c) \leq e^{\lambda^2 c^2 / 2}$ (逐项比较幂级数)。对 $Y = M_k - M_{k-1}$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{k-1}$ 用这一估计并归纳 (塔性质), $\mathbb{E}[e^{\lambda(M_n - M_0)}] \leq \exp(\frac{\lambda^2}{2} \sum_k c_k^2)$. 由 Markov 不等式, $\mathbb{P}(M_n - M_0 \geq x) \leq \exp(-\lambda x + \frac{\lambda^2}{2} \sum_k c_k^2)$, 取 $\lambda = x / \sum_k c_k^2$.

定理 6.24 (鞅中心极限定理)

设 $M_n = \sum_{k \leq n} \xi_k$ 是鞅 ($M_0 = 0$), $|\xi_k| \leq c$, 且 $\frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \mathbb{E}[\xi_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$ (常数)。则 $M_n/\sqrt{n} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 。



证明 固定 $u \in \mathbb{R}$, 令 $\phi_{n,k} = \mathbb{E}[e^{iu\xi_k/\sqrt{n}} | \mathcal{F}_{k-1}]$, $P_n = \prod_{k \leq n} \phi_{n,k}$ 。由 Taylor 展开 (引理 4.16) 与 $\mathbb{E}[\xi_k | \mathcal{F}_{k-1}] = 0$, $\phi_{n,k} = 1 - \frac{u^2}{2n} V_k + r_{n,k}$, $V_k = \mathbb{E}[\xi_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \leq c^2$, $|r_{n,k}| \leq \frac{|u|^3 c^3}{6n^{3/2}}$ 。对 n 充分大, $|\phi_{n,k} - 1| \leq \frac{1}{2}$, 取主值对数, $\log \phi_{n,k} = -\frac{u^2}{2n} V_k + O(n^{-3/2})$ (一致), 故

$$P_n = \exp\left(-\frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} V_k + O(n^{-1/2})\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} L := e^{-u^2 \sigma^2 / 2}, \quad |P_n| \geq \delta > 0.$$

由于 P_n 关于 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测, $\mathbb{E}[e^{iuM_n/\sqrt{n}}/P_n | \mathcal{F}_{n-1}] = e^{iuM_{n-1}/\sqrt{n}}/P_{n-1}$ (这里 P_{n-1} 指同一个 n 下前 $n-1$ 个因子之积), 归纳得 $\mathbb{E}[e^{iuM_n/\sqrt{n}}/P_n] = 1$ 。于是

$$|\mathbb{E}[e^{iuM_n/\sqrt{n}}] - L| = \left| \mathbb{E}\left[\frac{e^{iuM_n/\sqrt{n}}}{P_n}(P_n - L)\right] \right| \leq \delta^{-1} \mathbb{E}|P_n - L| \rightarrow 0$$

(控制收敛: $|P_n - L| \leq 2$)。由 Lévy 定理 4.11 得证。

例 6.3 (Pólya 罐子) 罐中开始有一红一黑两个球。每次随机摸出一球, 放回并再放入一个同色球。设 R_n 为 n 次摸球后红球数, $X_n = R_n/(n+2)$ 。则 $\mathbb{E}[R_{n+1} | \mathcal{F}_n] = R_n + \frac{R_n}{n+2}$, 故 $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$: X 是取值于 $[0, 1]$ 的鞅, a.s. 收敛到某个 X_∞ 。前 n 次中在指定的 k 次摸到红球的概率为 $\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$ (分子分母逐次相乘), 与顺序无关, 故 $\mathbb{P}(R_n = k+1) = \binom{n}{k} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$, $k = 0, \dots, n$ 。 X_n 在 $\{\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{n+1}{n+2}\}$ 上均匀分布, 由定理 4.8(6), X_∞ 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。

定理 6.25 (Kakutani)

设 $Y_1, Y_2, \dots$ 为独立非负随机变量, $\mathbb{E}Y_k = 1$, $M_n = \prod_{k \leq n} Y_k$, $a_k = \mathbb{E}\sqrt{Y_k} \in (0, 1]$ 。若 $\prod_k a_k > 0$, 则 M 是一致可积鞅, $\mathbb{E}M_\infty = 1$; 若 $\prod_k a_k = 0$, 则 $M_\infty = 0$ a.s.



证明 $a_k > 0$, 否则 $Y_k = 0$ a.s.; $a_k \leq 1$ 由 Jensen。 $N_n = \prod_{k \leq n} \sqrt{Y_k}/a_k$ 是非负鞅, $\mathbb{E}N_n^2 = \prod_{k \leq n} a_k^{-2}$ 。若 $\prod a_k =: a > 0$, 则 N 是 L^2 有界鞅, 由 Doob 不等式 $\mathbb{E}[\sup_n N_n^2] \leq 4a^{-2}$, 而 $M_n = N_n^2 \prod_{k \leq n} a_k^2 \leq \sup_m N_m^2$, 由命题 4.4 一致可积, 故于 L^1 收敛, $\mathbb{E}M_\infty = 1$ 。若 $\prod a_k = 0$, N_n a.s. 收敛到有限极限 (定理 6.11), 于是 $\sqrt{M_n} = N_n \prod_{k \leq n} a_k \rightarrow 0$ 。

注 Kakutani 定理的一个推论是无穷乘积测度的“二分律”: 设 μ_k, ν_k 是等价的概率测度, 则 $\otimes \nu_k$ 与 $\otimes \mu_k$ 要么等价 (当 $\prod_k \int \sqrt{d\nu_k/d\mu_k} d\mu_k > 0$), 要么相互奇异。取 $Y_k = \frac{d\nu_k}{d\mu_k}(\xi_k)$ 即可看出这一点。

定理 6.26 (Kolmogorov 三级数定理)

设 (X_n) 为独立实随机变量, $A > 0$, $Y_n = X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq A\}}$ 。则 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛, 当且仅当以下三个级数都收敛:

$$(i) \sum_n \mathbb{P}(|X_n| > A), \quad (ii) \sum_n \mathbb{E}[Y_n], \quad (iii) \sum_n \text{Var}(Y_n).$$



证明 充分性。由 (iii) 与推论 6.14, $\sum(Y_n - \mathbb{E}Y_n)$ a.s. 收敛, 结合 (ii) 得 $\sum Y_n$ 收敛; 由 (i) 与 Borel–Cantelli, a.s. 只有有限个 n 使 $X_n \neq Y_n$ 。

必要性。设 $\sum X_n$ a.s. 收敛, 则 $X_n \rightarrow 0$, a.s. 只有有限个 n 使 $|X_n| > A$; 由 Borel–Cantelli 第二引理 (独立性), (i) 成立, 从而 $\sum Y_n$ 也 a.s. 收敛。为证 (iii), 取 (Y'_n) 为 (Y_n) 的独立副本 (在乘积空间上), $Z_n = Y_n - Y'_n$: 独立、对称、 $|Z_n| \leq 2A$, $\sum Z_n$ a.s. 收敛, $\text{Var} Z_n = 2 \text{Var} Y_n$ 。令 $R_n = \sum_{k \leq n} Z_k$, $V_n = \sum_{k \leq n} \text{Var} Z_k$, 则 $R_n^2 - V_n$ 是鞅。由于 $\sup_n |R_n| < \infty$ a.s., 可取 L 使 $T = \inf\{n : |R_n| > L\}$ 满足 $\mathbb{P}(T = \infty) > 0$ 。由可选停止, $\mathbb{E}[V_{T \wedge n}] = \mathbb{E}[R_{T \wedge n}^2] \leq (L + 2A)^2$, 而 $V_{T \wedge n} \geq V_n \mathbf{1}_{\{T = \infty\}}$, 故 $V_n \leq (L + 2A)^2 / \mathbb{P}(T = \infty)$, 即 (iii)。于是 $\sum(Y_n - \mathbb{E}Y_n)$ 收敛 (推论 6.14), 与 $\sum Y_n$ 收敛相减得 (ii)。

命题 6.27

设 M 是鞅, $|M_n - M_{n-1}| \leq c$ 。则 a.s. 要么 $\lim M_n$ 存在且有限, 要么 $\limsup M_n = +\infty$ 且 $\liminf M_n = -\infty$ 。

证明 不妨 $M_0 = 0$ 。对 $a > 0$, 令 $T_a = \inf\{n : M_n \leq -a\}$ 。停止鞅 $M^{T_a} \geq -a - c$, 由定理 6.11 a.s. 收敛。在 $\{T_a = \infty\}$ 上 $M = M^{T_a}$, 而 $\bigcup_a \{T_a = \infty\} = \{\inf_n M_n > -\infty\}$ 。故在 $\{\liminf M_n > -\infty\}$ 上 M 收敛; 对 $-M$ 同理。

推论 6.28 (条件 Borel–Cantelli 引理)

设 $A_n \in \mathcal{F}_n$ 。则 a.s. $\{A_n \text{ 发生无穷多次}\} = \{\sum_n \mathbb{P}(A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \infty\}$ 。

证明 $M_n = \sum_{k \leq n} (\mathbf{1}_{A_k} - \mathbb{P}(A_k | \mathcal{F}_{k-1}))$ 是增量有界的鞅。在 M 收敛的事件上, $\sum \mathbf{1}_{A_k}$ 与 $\sum \mathbb{P}(A_k | \mathcal{F}_{k-1})$ 同为有限或同为无穷; 在 M 振荡的事件上, 两者都为无穷 ($\limsup M = +\infty$ 迫使 $\sum \mathbf{1}_{A_k} = \infty$, $\liminf M = -\infty$ 迫使 $\sum \mathbb{P}(A_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \infty$)。

当 A_n 独立时, 这就是 Borel–Cantelli 引理 3.6 的两个部分。

定义 6.29

实随机变量序列 $(X_n)_{n \geq 1}$ 称为可交换的, 若对每个只移动有限多个指标的置换 ρ , $(X_{\rho(n)})_n \stackrel{(d)}{=} (X_n)_n$ 。

独立同分布序列是可交换的; Pólya 罐子中“第 n 次摸到红球”的示性函数序列也是 (例 6.3 中的计算表明其有限维分布只依赖于红球个数)。

定理 6.30 (de Finetti)

设 (X_n) 可交换。则存在随机概率测度 Λ (即从 $(\Omega, \mathcal{E})$ 到 $\mathbb{R}$ 的转移核, $\mathcal{E}$ 为下面定义的可交换 σ -代数), 使对一切 m 与有界可测 $f_1, \dots, f_m$,

$$\mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^m f_j(X_j) \mid \mathcal{E} \right] = \prod_{j=1}^m \int f_j d\Lambda.$$

即: 给定 $\mathcal{E}$, (X_n) 条件独立同分布, 条件分布为 Λ 。

证明 令 $\mathcal{G}_{-n} = \sigma(h(X_1, \dots, X_n), X_{n+1}, X_{n+2}, \dots; h \text{ 为对称可测函数})$, 它由随机元 $Z_n = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)}, X_{n+1}, \dots)$ (前 n 项的顺序统计量与其余各项) 生成, 递减; 令 $\mathcal{E} = \bigcap_n \mathcal{G}_{-n}$ 。设 $m \leq n$, $i_1, \dots, i_m \leq n$ 互不相同。交换指标的置换不改变 Z_n , 故 $(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}, Z_n) \stackrel{(d)}{=} (X_1, \dots, X_m, Z_n)$, 从而 (如定理 6.21 后的注)

$$\mathbb{E} \left[\prod_j f_j(X_j) \mid \mathcal{G}_{-n} \right] = \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_m \text{ 互异}} \prod_j f_j(X_{i_j}).$$

由定理 6.20, 左边 a.s. 收敛到 $\mathbb{E}[\prod_j f_j(X_j) | \mathcal{E}]$ 。右边与 $\prod_j (\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} f_j(X_i))$ 之差不超过 $C_m \prod_j \|f_j\|_\infty / n$ (有重复指标的项只占 $O(n^{m-1})$ 个), 而 $m=1$ 的情形说明 $\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} f(X_i) \rightarrow \mathbb{E}[f(X_1) | \mathcal{E}]$ a.s.。故 $\mathbb{E}[\prod_j f_j(X_j) | \mathcal{E}] = \prod_j \mathbb{E}[f_j(X_1) | \mathcal{E}]$ 。最后由定理 5.9 (取 $X = \text{id} : (\Omega, \mathcal{E}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{E})$, $Y = X_1$), 存在转移核 Λ 使 $\mathbb{E}[f(X_1) | \mathcal{E}] = \int f d\Lambda$ a.s.

例如对 Pólya 罐子, $\Lambda = \mathcal{B}(X_\infty)$ (以极限比例 X_∞ 为参数的 Bernoulli 分布): 给定 X_∞ , 各次摸球条件独立。

第7章 可数状态空间上的马尔可夫链

马尔可夫性说的是：在预测未来时，已知现在之后，过去不提供额外信息。本章研究可数状态空间上的离散时间马氏链：典范构造与（强）马氏性、状态分类、不变测度、遍历定理与收敛到平衡，以及马氏链与鞅、调和函数之间的联系。下一章将在此基础上发展位势理论与边界理论。

在本章与下一章中， E 总表示一个可数集，配离散 σ -代数（ E 上的一切函数都可测， E 作为离散度量空间是 Polish 空间）。

7.1 转移矩阵与马氏链

定义 7.1

E 上的转移矩阵（随机矩阵）是 $Q = (Q(x, y))_{x, y \in E}$, $Q(x, y) \geq 0$, $\sum_y Q(x, y) = 1$ 。若只要求 $\sum_y Q(x, y) \leq 1$ ，称为次随机矩阵。



矩阵乘积 $Q_1 Q_2(x, y) = \sum_z Q_1(x, z) Q_2(z, y)$ 仍是转移矩阵； $Q^0 = I$, Q^n 为 n 次幂。对非负（或有界）函数 f 记 $Qf(x) = \sum_y Q(x, y)f(y)$ ；对 E 上的测度 μ 记 $\mu Q(y) = \sum_x \mu(x)Q(x, y)$ 。

定义 7.2

设 $(\mathcal{F}_n)$ 为滤子， (X_n) 是取值于 E 的适应过程， μ 为 E 上的概率测度。称 (X_n) 为以 μ 为初始分布、 Q 为转移矩阵的 $((\mathcal{F}_n)-)$ 马氏链，若 $X_0 \sim \mu$ ，且对一切 $n \in \mathbb{N}$ 与 $y \in E$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid \mathcal{F}_n) = Q(X_n, y) \quad \text{a.s.}$$

若未指明滤子，取自然滤子。



命题 7.3

(1) 若 (X_n) 是 $(\mathcal{F}_n)$ -马氏链，则对非负 f 与 $m \geq 0$, $\mathbb{E}[f(X_{n+m}) \mid \mathcal{F}_n] = Q^m f(X_n)$ ，且

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu(x_0)Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x_n). \quad (7.1)$$

(2) 反之，若 (7.1) 对一切 n 与 $x_0, \dots, x_n$ 成立，则 (X_n) 是（关于自然滤子的）马氏链。因此马氏链的分布（作为 $E^{\mathbb{N}}$ 上的测度）由 μ 与 Q 唯一决定。



证明 (1) $\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \sum_y f(y)Q(X_n, y) = Qf(X_n)$ ；对 m 归纳并用塔性质。(7.1) 对 n 归纳： $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_0=x_0, \dots, X_n=x_n\}}Q(X_n, x_{n+1})]$ 。(2) 由 (7.1)，对 $A = \{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$, $\mathbb{P}(A \cap \{X_{n+1} = y\}) = \mathbb{P}(A)Q(x_n, y) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Q(X_n, y)]$ 。这样的 A 生成 $\sigma(X_0, \dots, X_n)$ 且每个元素是它们的可数不交并。最后一个论断由 π - λ 定理（柱集构成 π -系）。

例 7.1

1. 若 $X_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ 独立， ξ_i 取值于空间 F , $\phi: E \times F \rightarrow E$ ，则 $X_{n+1} = \phi(X_n, \xi_{n+1})$ 是马氏链， $Q(x, y) = \mathbb{P}(\phi(x, \xi_1) = y)$ （由冻结引理 5.5）。任何转移矩阵都可如此实现：把 E 编号并取 ξ_i 为均匀分布， $\phi(x, u)$ 为 $Q(x, \cdot)$ 的广义逆在 u 处的值。
2. $\mathbb{Z}^d$ 上的随机游走： $X_n = X_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$, ξ_i 独立同分布于 ν , $Q(x, y) = \nu(y - x)$ 。 ν 为 $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$ 上均匀分布时称为简单随机游走。
3. 图上的随机游走： E 是局部有限图的顶点集， $Q(x, y) = \mathbf{1}_{\{x \sim y\}} / \deg(x)$ 。测度 $\mu(x) = \deg(x)$ 满足 $\mu(x)Q(x, y) = \mu(y)Q(y, x)$ 。
4. Galton-Watson 分支过程：设 ν 为 $\mathbb{N}$ 上的概率测度（后代分布）， $(\xi_{n,j})$ 独立同分布于 ν 。令 $Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_{n,j}$ 。 (Z_n) 是 $\mathbb{N}$ 上的马氏链， $Q(k, \cdot) = \nu^{*k}$, 0 是吸收态。

5. 生灭链: $E = \mathbb{N}$, $Q(k, k+1) = p_k$, $Q(k, k-1) = q_k$, $Q(k, k) = r_k$, $p_k + q_k + r_k = 1$, $q_0 = 0$ 。

7.2 典范马氏链与马氏性

令 $\Omega = E^{\mathbb{N}}$, $X_n(\omega) = \omega_n$ 为坐标映射, $\mathcal{F} = \sigma(X_n, n \geq 0)$ 为乘积 σ -代数, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ 。平移算子 $\theta_k: \Omega \rightarrow \Omega$ 定义为 $\theta_k(\omega) = (\omega_{k+n})_{n \geq 0}$, 即 $X_n \circ \theta_k = X_{n+k}$; 它是可测的。

定理 7.4

对每个转移矩阵 Q 与 $x \in E$, 存在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上唯一的概率测度 $\mathbb{P}_x$, 使得在 $\mathbb{P}_x$ 下坐标过程 (X_n) 是从 x 出发、转移矩阵为 Q 的马氏链。对 E 上的概率测度 μ , 令 $\mathbb{P}_\mu = \sum_x \mu(x) \mathbb{P}_x$, 在 $\mathbb{P}_\mu$ 下 (X_n) 是初始分布为 μ 的马氏链。

证明 对 $J = \{0, 1, \dots, n\}$ 令 $\mu_J(x_0, \dots, x_n) = \mathbf{1}_{\{x_0=x\}} Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x_n)$ 。由 $\sum_{x_{n+1}} Q(x_n, x_{n+1}) = 1$, 这族测度相容 (对一般有限 J , 取 $\{0, \dots, \max J\}$ 上的测度的边缘)。由 Kolmogorov 扩张定理 3.11 得 $\mathbb{P}_x$; 由命题 7.3(2), 坐标过程是马氏链; 唯一性亦由该命题。

由命题 7.3, 任何 (定义在任何概率空间上的) 初始分布为 μ 的 Q -马氏链的分布都是 $\mathbb{P}_\mu$ 。因此下面关于典范链的结论都可以转移到一般的马氏链上。我们用 $\mathbb{E}_x$ 、 $\mathbb{E}_\mu$ 表示相应的期望。

定理 7.5 (马氏性)

设 $F: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ 是 $\mathcal{F}$ -可测的, μ 为初始分布, $n \geq 0$ 。则

$$\mathbb{E}_\mu[F \circ \theta_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[F] \quad \text{a.s.},$$

其中右边表示函数 $x \mapsto \mathbb{E}_x[F]$ 在 X_n 处的值。换言之, 在 $\mathbb{P}_\mu$ 下给定 $\mathcal{F}_n$ 时, $(X_{n+k})_{k \geq 0}$ 的条件分布是 $\mathbb{P}_{X_n}$ 。

证明 设 $F = \mathbf{1}_{\{X_0=y_0, \dots, X_m=y_m\}}$, $A = \{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$ 。由 (7.1),

$$\mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_A F \circ \theta_n] = \mu(x_0) \prod_{i < n} Q(x_i, x_{i+1}) \mathbf{1}_{\{x_n=y_0\}} \prod_{j < m} Q(y_j, y_{j+1}) = \mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_A \mathbb{E}_{X_n}[F]].$$

这样的 A 的可数不交并给出 $\mathcal{F}_n$ 的全部元素, 故等式对 $A \in \mathcal{F}_n$ 成立。满足结论的有界 F 构成向量空间, 对单调有界极限封闭, 且包含柱集的示性函数 (π -系), 由定理 1.8 对一切有界 $\mathcal{F}$ -可测 F 成立; 对非负 F 由单调收敛。($x \mapsto \mathbb{E}_x[F]$ 的可测性是平凡的, 因为 E 可数。)

定理 7.6 (强马氏性)

设 T 为 $(\mathcal{F}_n)$ -停时, F 如上。则

$$\mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} F \circ \theta_T | \mathcal{F}_T] = \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \mathbb{E}_{X_T}[F] \quad \text{a.s.},$$

其中 $\theta_T(\omega) = \theta_{T(\omega)}(\omega)$ 在 $\{T < \infty\}$ 上定义。特别地, 在 $\mathbb{P}_\mu(\cdot | T < \infty)$ 下 (若 $\mathbb{P}_\mu(T < \infty) > 0$), $(X_{T+k})_{k \geq 0}$ 的条件分布在给定 $\mathcal{F}_T$ 时是 $\mathbb{P}_{X_T}$; 若 $X_T = y$ a.s. 于 $\{T < \infty\}$, 则 $(X_{T+k})_k$ 在 $\mathbb{P}_\mu(\cdot | T < \infty)$ 下服从 $\mathbb{P}_y$ 且与 $\mathcal{F}_T$ 独立。

证明 对 $A \in \mathcal{F}_T$, $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$, 由马氏性, $\mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{T=n\}} F \circ \theta_n] = \mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_{A \cap \{T=n\}} \mathbb{E}_{X_n}[F]]$ 。对 n 求和。右边是 $\mathcal{F}_T$ -可测的 (命题 6.6(3))。

7.3 状态的分类

对 $y \in E$ 定义

$$H_y = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}, \quad T_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}, \quad N_y = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{X_n = y\}},$$

分别为（严格未来的）首达时、首中时与访问次数。 $Green$ 函数（或位势核）为

$$G(x, y) = \mathbb{E}_x[N_y] = \sum_{n \geq 0} Q^n(x, y) \in [0, \infty].$$

定义 7.7

状态 y 称为常返的，若 $\mathbb{P}_y(H_y < \infty) = 1$ ；否则称为暂留的。

命题 7.8

(1) 若 y 常返，则 $\mathbb{P}_y(N_y = \infty) = 1$, $G(y, y) = \infty$ 。(2) 若 y 暂留，则在 $\mathbb{P}_y$ 下 N_y 服从参数为 $\mathbb{P}_y(H_y < \infty)$ 的几何分布： $\mathbb{P}_y(N_y \geq k) = \mathbb{P}_y(H_y < \infty)^{k-1}$ ，从而 $G(y, y) = 1/\mathbb{P}_y(H_y = \infty) < \infty$ ，且对一切 x , $N_y < \infty$ $\mathbb{P}_x$ -a.s. (3) 对一切 x, y , $G(x, y) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)G(y, y)$ 。

证明 对 $k \geq 1$ ，在 $\{N_y \geq k\}$ 上（ $\mathbb{P}_y$ 下）第 k 次访问时刻 τ_k 有限， $N_y \circ \theta_{\tau_k} = N_y - k + 1$ 。由强马氏性， $\mathbb{P}_y(N_y \geq k+1) = \mathbb{P}_y(N_y \geq k)\mathbb{P}_y(H_y < \infty)$ 。由此得 (1)(2)。(3)： $N_y = N_y \circ \theta_{T_y}$ 于 $\{T_y < \infty\}$ ，用强马氏性。

我们说 x 通向 y ($x \rightarrow y$)，若 $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) > 0$ ，即存在 $n \geq 0$ 使 $Q^n(x, y) > 0$ 。若 $x \rightarrow y$ 且 $y \rightarrow x$ ，称 x, y 互通。互通是等价关系，其等价类称为类。若只有一个类，称链不可约。集合 C 称为闭的，若 $x \in C$, $x \rightarrow y$ 蕴含 $y \in C$ 。

命题 7.9

若 x 常返且 $x \rightarrow y$ ，则 y 常返， $y \rightarrow x$ ，且 $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = \mathbb{P}_y(T_x < \infty) = 1$ 。因此常返性是类性质，常返类是闭的。

证明 设 $y \neq x$ 。由强马氏性（于停时 T_y ）与命题 7.8(1)，

$$0 = \mathbb{P}_x(N_x < \infty) \geq \mathbb{P}_x(T_y < \infty, T_x \circ \theta_{T_y} = \infty) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)\mathbb{P}_y(T_x = \infty),$$

而 $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) > 0$ ，故 $\mathbb{P}_y(T_x < \infty) = 1$ ，特别地 $y \rightarrow x$ 。取 m, n 使 $Q^m(y, x) > 0$, $Q^n(x, y) > 0$ ，则 $G(y, y) \geq \sum_k Q^m(y, x)Q^k(x, x)Q^n(x, y) = \infty$ ，故 y 常返。交换 x, y 的角色重复第一步，得 $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$ 。

定理 7.10 (分类定理)

$E = T \cup \bigcup_{i \in I} R_i$ （不交并），其中 T 为暂留态全体， R_i 为常返类（闭集）。若 $x \in R_i$ ，则 $\mathbb{P}_x$ -a.s. 链永远停在 R_i 中，且访问 R_i 中每个状态无穷多次。若 $x \in T$ ，则 $\mathbb{P}_x$ -a.s. 链要么访问 T 中每个状态有限次且永远停在 T 中（这要求 T 无限），要么在某个有限时刻进入某个 R_i 并永远停在那里。

证明 第一部分由命题 7.9。若 $x \in T$ ，由命题 7.8(2) 每个暂留态只被访问有限次；若链进入某个 R_i ，它永远停在那里。若 T 有限且链永不离开 T ，则某个状态被访问无穷多次，矛盾。

不可约链要么所有状态常返（称链常返），要么所有状态暂留（称链暂留）。

定理 7.11 (Pólya)

$\mathbb{Z}^d$ 上的简单随机游走当 $d \leq 2$ 时常返，当 $d \geq 3$ 时暂留。

证明 令 $\phi(\theta) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos \theta_j$ ，它是一步增量的特征函数： $\mathbb{E}[e^{i(\theta, \xi_1)}] = \phi(\theta)$ 。于是 $\mathbb{E}_0[e^{i(\theta, X_n)}] = \phi(\theta)^n$ ，由 $\int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i(\theta, x)} d\theta = (2\pi)^d \mathbf{1}_{\{x=0\}}$ ($x \in \mathbb{Z}^d$) 与 Fubini，

$$Q^n(0, 0) = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \phi(\theta)^n d\theta.$$

对 $0 < s < 1$ ， $\sum_n s^n Q^n(0, 0) = (2\pi)^{-d} \int \frac{d\theta}{1-s\phi(\theta)}$ ，令 $s \uparrow 1$ ，左边由单调收敛趋于 $G(0, 0)$ 。

注意 $\frac{1}{1-s\phi} \leq \frac{1}{1-\phi}$ 于 $\{\phi \geq 0\}$ ， $\frac{1}{1-s\phi} \leq 1$ 于 $\{\phi < 0\}$ 。由 $1 - \cos t \geq 2t^2/\pi^2$ ($|t| \leq \pi$)， $1 - \phi(\theta) \geq \frac{2|\theta|^2}{\pi^2 d}$ 。若 $d \geq 3$ ， $|\theta|^{-2}$ 在 $[-\pi, \pi]^d$ 上可积，由控制收敛 $G(0, 0) = (2\pi)^{-d} \int \frac{d\theta}{1-\phi} < \infty$ ，游走暂留。若 $d \leq 2$ ，由 $1 - \cos t \leq t^2/2$ 得

$1 - \phi(\theta) \leq \frac{|\theta|^2}{2d}$, 在 $\{|\theta| < 1\} \subset \{\phi \geq 0\}$ 上由 Fatou 引理, $G(0,0) \geq (2\pi)^{-d} \int_{|\theta|<1} \frac{2d}{|\theta|^2} d\theta = \infty$, 游走常返。

7.4 不变测度

定义 7.12

E 上的测度 μ (取值于 $[0, \infty]$, 不恒为 0 也不在某点取 ∞) 称为不变的, 若 $\mu Q = \mu$ 。称 μ 可逆, 若 $\mu(x)Q(x,y) = \mu(y)Q(y,x)$ 对一切 x, y 成立; 可逆测度是不变的。



若 μ 是不变概率测度, 则 $\mathbb{P}_\mu$ 下 (X_n) 是平稳的: $(X_{n+k})_{k \geq 0}$ 在 $\mathbb{P}_\mu$ 下服从 $\mathbb{P}_\mu$ 。

引理 7.13 (游程分解)

设 x 常返。在 $\mathbb{P}_x$ 下令 $\tau_0 = 0$, $\tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k : X_n = x\}$ 为第 $k+1$ 次返回时刻。则游程 $\mathcal{E}_k = (\tau_{k+1} - \tau_k, (X_{\tau_k+j})_{0 \leq j < \tau_{k+1} - \tau_k})$, $k \geq 0$, 是独立同分布的 (取值于可数集 $\bigcup_{m \geq 1} \{m\} \times E^m$)。



证明 $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_0 \circ \theta_{\tau_k}$, 且 $\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_{k-1}$ 是 $\mathcal{F}_{\tau_k}$ -可测的, $X_{\tau_k} = x$ 。由强马氏性 (定理 7.6 的最后一个论断, $\mathbb{P}_x(\tau_k < \infty) = 1$ 由常返性与命题 7.8), $\mathcal{E}_k$ 与 $\mathcal{F}_{\tau_k}$ 独立且与 $\mathcal{E}_0$ 同分布。归纳即得。

定理 7.14

设链不可约常返, $x \in E$ 。则

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{H_x-1} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}} \right]$$

是不变测度, $0 < \mu_x(y) < \infty$ 对一切 y 成立, $\mu_x(x) = 1$ 。任何不变测度都是 μ_x 的常数倍。



证明 不变性。由于 $X_{H_x} = X_0 = x$, $\mu_x(y) = \mathbb{E}_x[\sum_{k=1}^{H_x} \mathbf{1}_{\{X_k=y\}}] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_x(X_k = y, H_x \geq k)$ 。而 $\{H_x \geq k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$, 由马氏性

$$\mathbb{P}_x(X_k = y, H_x \geq k) = \sum_z \mathbb{P}_x(X_{k-1} = z, H_x \geq k)Q(z, y),$$

对 $k \geq 1$ 求和得 $\mu_x(y) = \sum_z \mu_x(z)Q(z, y)$ ($\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_x(X_{k-1} = z, H_x \geq k) = \mu_x(z)$)。

正有限。对任何不变测度 λ 与 n , $\lambda(y) \geq \lambda(z)Q^n(z, y)$ 。由不可约性, $\lambda(x) > 0$ 蕴含 $\lambda(y) > 0$, $\lambda(y) = \infty$ 蕴含 $\lambda(x) = \infty$ 。对 μ_x , $\mu_x(x) = 1$, 故 $0 < \mu_x(y) < \infty$ 。

唯一性。设 λ 不变, $\lambda(x) = 1$ 。对 $y \neq x$, 反复使用 $\lambda = \lambda Q$ 并把 $z = x$ 的项分出:

$$\lambda(y) = Q(x, y) + \sum_{z_1 \neq x} \lambda(z_1)Q(z_1, y) = Q(x, y) + \sum_{z_1 \neq x} Q(x, z_1)Q(z_1, y) + \sum_{z_1, z_2 \neq x} \lambda(z_2)Q(z_2, z_1)Q(z_1, y) = \dots$$

舍去舍 λ 的非负项, 得 $\lambda(y) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_x(X_k = y, H_x \geq k) \rightarrow \mu_x(y)$ 。于是 $\nu = \lambda - \mu_x \geq 0$ 是满足 $\nu Q = \nu$, $\nu(x) = 0$ 的测度, 由上一段 $\nu \equiv 0$ 。

定义 7.15

常返态 x 称为正常返的, 若 $\mathbb{E}_x[H_x] < \infty$; 否则称为零常返的。



定理 7.16

设链不可约。

1. 若链常返, 则要么所有状态正常返, 此时存在唯一的不变概率测度 π , 且 $\pi(x) = 1/\mathbb{E}_x[H_x]$; 要么所有状态零常返, 此时不存在不变概率测度 (所有不变测度的总质量为 ∞)。
2. 若存在不变概率测度, 则链常返 (从而正常返)。



证明 (1) $\mu_x(E) = \mathbb{E}_x[H_x]$ 。由唯一性, 所有不变测度总质量同为有限或同为无穷; 若有限, $\pi = \mu_x/\mathbb{E}_x[H_x]$ 对每

个 x 都是那个唯一的不变概率, 取 $y = x$ 得 $\pi(x) = 1/\mathbb{E}_x[H_x]$, 所有状态正常返。(2) 若链暂留, 则 $G(x, y) < \infty$ (命题 7.8(3)), 故 $Q^n(x, y) \rightarrow 0$; 由控制收敛, $\pi(y) = \sum_x \pi(x)Q^n(x, y) \rightarrow 0$, 矛盾。

命题 7.17 (时间反转)

设 μ 是处处为正的不变测度, 令 $\hat{Q}(x, y) = \mu(y)Q(y, x)/\mu(x)$ 。则 $\hat{Q}$ 是转移矩阵, μ 关于 $\hat{Q}$ 不变, $\hat{Q}^n(x, y) = \mu(y)Q^n(y, x)/\mu(x)$, $\hat{G}(x, y) = \mu(y)G(y, x)/\mu(x)$; 因此 $\hat{Q}$ 与 Q 同为不可约、常返或暂留。若 $\pi = \mu$ 是概率测度, 则在 $\mathbb{P}_\pi$ 下, 对每个 N , $(X_{N-n})_{0 \leq n \leq N}$ 是初始分布为 π 、转移矩阵为 $\hat{Q}$ 的马氏链 (逆向链)。
 $\hat{Q} = Q$ 当且仅当 μ 可逆。

证明 $\sum_y \hat{Q}(x, y) = \mu Q(x)/\mu(x) = 1$; n 步公式归纳可得。由 (7.1), $\mathbb{P}_\pi(X_N = y_0, X_{N-1} = y_1, \dots, X_0 = y_N) = \pi(y_N)Q(y_N, y_{N-1}) \cdots Q(y_1, y_0) = \pi(y_0)\hat{Q}(y_0, y_1) \cdots \hat{Q}(y_{N-1}, y_N)$, 再用命题 7.3(2)。

命题 7.18 (Kac 引理)

设链不可约正常返, π 为不变概率, $A \subset E$ 非空。则 $\sum_{x \in A} \pi(x)\mathbb{E}_x[H_A] = 1$ 。特别地 $\mathbb{E}_x[H_x] = 1/\pi(x)$ 。

证明 在 $\mathbb{P}_\pi$ 下链平稳。令 $a_n = \mathbb{P}_\pi(X_0 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A)$, $a_0 = 1$ 。由平稳性, $\mathbb{P}_\pi(X_0 \in A, X_1 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A) = \mathbb{P}_\pi(X_1, \dots, X_{n-1} \notin A) - \mathbb{P}_\pi(X_0, \dots, X_{n-1} \notin A) = a_{n-1} - a_n$ 。对 $n \geq 1$ 求和: 左边之和为 $\mathbb{E}_\pi[H_A; X_0 \in A] = \sum_{x \in A} \pi(x)\mathbb{E}_x[H_A]$, 右边之和为 $1 - \lim a_n = 1 - \mathbb{P}_\pi(T_A = \infty) = 1$ (命题 7.9)。

例 7.2 (Ehrenfest 模型) N 个分子分布在两个容器中, 每一步随机选一个分子换到另一侧。左侧分子数 X_n 是 $\{0, \dots, N\}$ 上的马氏链, $Q(k, k-1) = k/N$, $Q(k, k+1) = 1 - k/N$ 。二项分布 $\pi(k) = \binom{N}{k}2^{-N}$ 满足 $\pi(k)Q(k, k+1) = \pi(k+1)Q(k+1, k)$, 故是可逆的不变概率; 链周期为 2。由 Kac 引理, 从 $k=0$ (所有分子都在右侧) 出发返回 0 的平均时间为 2^N ——对宏观的 N 这是天文数字, 而从 $N/2$ 出发返回的平均时间只有 $\sim \sqrt{\pi N/2}$ 。这解释了“热力学的不可逆性”与“Poincaré 回归”之间的表面矛盾 (Kemeny–Snell–Knapp 第 6 章的例子之一)。

7.5 遍历定理与收敛到平衡

定理 7.19 (遍历定理)

设链不可约常返, μ 为不变测度, $f, g: E \rightarrow [0, \infty)$ 满足 $\int f d\mu < \infty$, $0 < \int g d\mu < \infty$ 。则对一切初始分布, a.s.

$$\frac{\sum_{k=0}^n f(X_k)}{\sum_{k=0}^n g(X_k)} \rightarrow \frac{\int f d\mu}{\int g d\mu}.$$

特别地, 若链正常返, π 为不变概率, $f \in L^1(\pi)$, 则 $\frac{1}{n} \sum_{k < n} f(X_k) \rightarrow \int f d\pi$ a.s.

证明 先设初始状态为 x , 并取 $\mu = \mu_x$ (比值与 μ 的常数倍无关)。令 $F_k = \sum_{\tau_k \leq j < \tau_{k+1}} f(X_j)$, 它是游程 $\mathcal{E}_k$ 的函数; 由引理 7.13, (F_k) 独立同分布, $\mathbb{E}_x[F_0] = \sum_y f(y)\mu_x(y) = \int f d\mu_x$ 。由强大数定律, $\frac{1}{m} \sum_{k < m} F_k \rightarrow \int f d\mu_x$ a.s.。对 n , 令 m_n 使 $\tau_{m_n} \leq n < \tau_{m_n+1}$, $m_n \rightarrow \infty$ 。由 $f \geq 0$,

$$\sum_{k < m_n} F_k \leq \sum_{j \leq n} f(X_j) \leq \sum_{k \leq m_n} F_k,$$

故 $\frac{1}{m_n} \sum_{j \leq n} f(X_j) \rightarrow \int f d\mu_x$; 对 g 同理, 相除即得。对一般初始分布 ν : 由命题 7.9, $T_x < \infty$ $\mathbb{P}_\nu$ -a.s., 用强马氏性于 T_x , 前 T_x 项的贡献是有限的, 不影响极限 (分母 $\rightarrow \infty$)。正常返情形取 $g=1$, 并对 $f^\pm$ 分别应用。

定义 7.20

状态 x 的周期是 $d(x) = \gcd\{n \geq 1 : Q^n(x, x) > 0\}$ 。若 $d(x) = 1$, 称 x 非周期。

若 x, y 互通, 则 $d(x) = d(y)$: 若 $Q^a(x, y) > 0$, $Q^b(y, x) > 0$, 则 $d(x) \mid a+b$, 且对 $Q^n(y, y) > 0$ 有 $d(x) \mid a+b+n$, 故 $d(x) \mid d(y)$, 对称地相等。

引理 7.21

若 $S \subset \mathbb{N}^*$ 对加法封闭且 $\gcd S = 1$, 则 S 包含所有充分大的整数。因此若 x 非周期, 则对充分大的 n 有 $Q^n(x, x) > 0$; 若链不可约非周期, 则对任何 x, y , 对充分大的 n 有 $Q^n(x, y) > 0$ 。



证明 存在 $s_1, \dots, s_k \in S$ 与整数 c_i 使 $\sum c_i s_i = 1$ 。令 $s = s_1, a = \sum_i |c_i| s_i \cdot s$, 则 $a \in S$ 且 $a+r = \sum_i (|c_i|s + rc_i) s_i \in S$ 对 $0 \leq r < s$ 成立 (取 $|c_i|s + rc_i \geq 0$)。于是 $a, a+1, \dots, a+s-1 \in S$, 再加 s 的倍数即得所有 $n \geq a$ 。
 $\{n : Q^n(x, x) > 0\}$ 对加法封闭。最后 $Q^{m+n}(x, y) \geq Q^m(x, y)Q^n(y, y)$ 。

定理 7.22 (收敛到平衡)

设链不可约、非周期。

1. 若链正常返, π 为不变概率, 则对一切初始分布 ν , $\sum_y |\mathbb{P}_\nu(X_n = y) - \pi(y)| \rightarrow 0$ 。
2. 若链暂留或零常返, 则对一切 x, y , $Q^n(x, y) \rightarrow 0$ 。



证明 耦合。令 (X_n, Y_n) 为 $E \times E$ 上转移矩阵为 $\bar{Q}((x, y), (x', y')) = Q(x, x')Q(y, y')$ 的马氏链 (两个独立的链), 初始分布 $\nu \otimes \nu'$ 。由引理 7.21, $\bar{Q}^n((x, y), (x', y')) = Q^n(x, x')Q^n(y, y') > 0$ 对充分大的 n , 故乘积链不可约。令 $\tau = \inf\{n : X_n = Y_n\}$ 。定义 $Z_n = Y_n$ ($n < \tau$), $Z_n = X_n$ ($n \geq \tau$)。 (Z_n) 与 (Y_n) 同分布: 由强马氏性 (应用于乘积链与停时 τ), 在 $\{\tau < \infty\}$ 上给定 $\mathcal{F}_\tau$ 时, $(X_{\tau+k}, Y_{\tau+k})_{k \geq 0}$ 的条件分布是 $\mathbb{P}_{X_\tau} \otimes \mathbb{P}_{Y_\tau}$, 而 $X_\tau = Y_\tau$, 因此 $(X_{\tau+k})_k$ 与 $(Y_{\tau+k})_k$ 给定 $\mathcal{F}_\tau$ 的条件分布相同; 把 $(Y_k)_{k < \tau}$ 后面接上 $(X_{\tau+k})_k$ 与接上 $(Y_{\tau+k})_k$ 得到的过程于是同分布。因此

$$\sum_y |\mathbb{P}(X_n = y) - \mathbb{P}(Y_n = y)| = \sum_y |\mathbb{P}(X_n = y) - \mathbb{P}(Z_n = y)| \leq 2\mathbb{P}(\tau > n).$$

(1) $\pi \otimes \pi$ 是乘积链的不变概率, 由定理 7.16(2), 乘积链常返, 故 $\tau \leq T_{(x,x)} < \infty$ a.s.。取 $\nu' = \pi$, 则 $\mathbb{P}(Y_n = y) = \pi(y)$, 结论由 $\mathbb{P}(\tau > n) \rightarrow 0$ 得出。

(2) 若链暂留, 由命题 7.8 $G(x, y) < \infty$, 故 $Q^n(x, y) \rightarrow 0$ 。设链零常返。若乘积链暂留, 则 $\sum_n Q^n(x, y)^2 = \sum_n \bar{Q}^n((x, x), (y, y)) < \infty$, 得证。若乘积链常返, 则对一切 x, z , $|Q^n(x, y) - Q^n(z, y)| \leq 2\mathbb{P}_{(x,z)}(\tau > n) \rightarrow 0$ 。假设 $\limsup_n Q^n(x, y) = \alpha > 0$, 取子列 n_k 使 $Q^{n_k}(x, y) \rightarrow \alpha$, 则对一切 z , $Q^{n_k}(z, y) \rightarrow \alpha$ 。令 μ 为不变测度, $\mu(E) = \infty$ (定理 7.16)。取有限集 A 使 $\mu(A) > 2\mu(y)/\alpha$, 则 $\mu(y) = \sum_z \mu(z)Q^{n_k}(z, y) \geq \sum_{z \in A} \mu(z)Q^{n_k}(z, y) \rightarrow \alpha\mu(A) > 2\mu(y)$, 矛盾。

命题 7.23 (周期类分解)

设链不可约, 周期为 d , $o \in E$ 。对 $x \in E$, 所有满足 $Q^n(o, x) > 0$ 的 n 模 d 同余; 令 C_i 为对应余数为 i 的状态全体 ($0 \leq i < d$)。则 $E = C_0 \cup \dots \cup C_{d-1}$ 为不交并, $x \in C_i$ 且 $Q(x, y) > 0$ 蕴含 $y \in C_{i+1}$ (下标模 d), 且 Q^d 在每个 C_i 上不可约、非周期。若链还正常返, 则对 $x, y \in C_i$, $Q^{nd}(x, y) \rightarrow d\pi(y)$ 。



证明 若 $Q^m(o, x) > 0$, $Q^{m'}(o, x) > 0$, 取 k 使 $Q^k(x, o) > 0$, 则 $d \mid m+k$, $d \mid m'+k$, 故 $m \equiv m'$ 。转移性质由 $Q^{m+1}(o, y) \geq Q^m(o, x)Q(x, y)$ 。若 $x, y \in C_i$ 且 $Q^n(x, y) > 0$, 则 $n \equiv 0 \pmod{d}$, 故 Q^d 在 C_i 上不可约; Q^d 在 x 处的周期是 $\gcd\{n/d : Q^n(x, x) > 0\} = 1$ 。若链正常返, 由 $\pi Q = \pi$ 与转移性质, $\pi(C_{i+1}) = \sum_{x \in C_i} \pi(x) \sum_{y \in C_{i+1}} Q(x, y) = \pi(C_i)$, 故 $\pi(C_i) = 1/d$, $d\pi|_{C_i}$ 是 $Q^d|_{C_i}$ 的不变概率; 用定理 7.22(1)。

7.6 鞅与调和函数

定义 7.24

函数 $h: E \rightarrow [0, \infty]$ (或有界函数 $h: E \rightarrow \mathbb{R}$) 称为 (Q -) 调和的, 若 $Qh = h$; 称为上调和的, 若 $Qh \leq h$ 。对 $A \subset E$, 称 h 在 A 上调和, 若 $Qh(x) = h(x)$ 对 $x \in A$ 成立。

命题 7.25

若 h 有界调和 (上调和) 或非负有限上调和, 则在每个 $\mathbb{P}_x$ 下 $h(X_n)$ 是关于 $(\mathcal{F}_n)$ 的鞅 (上鞅)。若 h 在 A 上调和, $T = \inf\{n \geq 0: X_n \notin A\}$, 则 $h(X_{n \wedge T})$ 是鞅 (当 h 有界)。

证明 $\mathbb{E}_x[h(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = Qh(X_n)$; 非负上调和时 $\mathbb{E}_x[h(X_n)] \leq h(x) < \infty$ 保证可积。第二个论断: $h(X_{(n+1) \wedge T}) - h(X_{n \wedge T}) = \mathbf{1}_{\{T > n\}}(h(X_{n+1}) - h(X_n))$, 而 $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$ 且其上 $X_n \in A$ 。

定理 7.26 (击中概率)

对 $B \subset E$, $u(x) = \mathbb{P}_x(T_B < \infty)$ 是方程组

$$u = 1 \text{ 于 } B, \quad u(x) = \sum_y Q(x, y)u(y) \quad (x \notin B)$$

的最小非负解; $k(x) = \mathbb{E}_x[T_B]$ 是 $k = 0$ 于 B 、 $k = 1 + Qk$ 于 B^c 的最小非负解 (允许取 ∞)。若 $\mathbb{P}_x(T_B < \infty) = 1$ 对一切 x 成立, 则对有界 $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, Dirichlet 问题“ $v = g$ 于 B , v 在 B^c 上调和”的有界解唯一, 为 $v(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{T_B})]$ 。

证明 u 满足方程: 对 $x \notin B$, $T_B = 1 + T_B \circ \theta_1$, 由马氏性 $u(x) = \mathbb{E}_x[u(X_1)]$ 。最小性: 若 $v \geq 0$ 是解, 则 $v \geq \mathbf{1}_B$, 且对 $x \notin B$, 反复代入 $v(x) = \sum_y Q(x, y)v(y) \geq \mathbb{P}_x(X_1 \in B) + \sum_{y \notin B} Q(x, y)v(y) \geq \cdots \geq \mathbb{P}_x(T_B \leq n)$, 令 $n \rightarrow \infty$ 。 k 的情形同理 ($v(x) \geq \sum_{m \leq n} \mathbb{P}_x(T_B \geq m)$)。唯一性: 若 v 为有界解, 由命题 7.25, $v(X_{n \wedge T_B})$ 是有界鞅, $\mathbb{E}_x[v(X_{n \wedge T_B})] = v(x)$, 令 $n \rightarrow \infty$, 由控制收敛 $v(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{T_B})]$ 。

定理 7.27

不可约链常返, 当且仅当每个非负上调和函数都是常数。

证明 设链常返, $h \geq 0$ 上调和。若 $h \equiv \infty$ 无需证明; 否则由 $h(x) \geq Q^n(x, y)h(y)$ 与不可约性, h 处处有限。由命题 7.25 与定理 6.11, $h(X_n)$ 在 $\mathbb{P}_x$ 下 a.s. 收敛; 但 X_n a.s. 无穷次访问每个状态, 故 h 在每两个状态处取值相同。反之, 若链暂留, 取 $y \in E$, $h(x) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$ 。由马氏性 $Qh(x) = \mathbb{P}_x(T_y \circ \theta_1 < \infty) \leq h(x)$ ($T_y \leq 1 + T_y \circ \theta_1$), $h(y) = 1$, 而 $Qh(y) = \mathbb{P}_y(H_y < \infty) < 1$, 故存在 z 使 $h(z) < 1$, h 不是常数。

例 7.3 (生灭链的常返性) 考虑例 7.1(5) 中的生灭链, 设 $p_k > 0$ ($k \geq 0$), $q_k > 0$ ($k \geq 1$)。令 $\rho_0 = 1$, $\rho_n = \prod_{k=1}^n \frac{q_k}{p_k}$ 。函数 $u(n) = \sum_{j < n} \rho_j$ 满足 $u(0) = 0$ 且在 $n \geq 1$ 处调和 ($p_n(u(n+1) - u(n)) = q_n(u(n) - u(n-1))$)。对 $0 < n < N$, 令 $T = T_0 \wedge T_N$ 。从 $\{1, \dots, N-1\}$ 中任一点出发, N 步内离开该集合的概率有正下界, 故 $T < \infty$ a.s.; $u(X_{k \wedge T})$ 是有界鞅 (命题 7.25), 由可选停止 $u(n) = u(N)\mathbb{P}_n(T_N < T_0)$ 。令 $N \rightarrow \infty$:

- 链常返当且仅当 $\sum_j \rho_j = \infty$ (此时从 1 出发 a.s. 回到 0);
- 测度 $\pi(0) = 1$, $\pi(n) = \prod_{k=1}^n \frac{p_{k-1}}{q_k}$ 是可逆的 ($\pi(n)p_n = \pi(n+1)q_{n+1}$), 故链正常返当且仅当它常返且 $\sum_n \pi(n) < \infty$ (定理 7.16; 实际上 $\sum \pi(n) < \infty$ 本身就蕴含正常返)。

例如 $p_k = p$, $q_k = 1 - p$ ($k \geq 1$): $p \leq \frac{1}{2}$ 时常返, $p < \frac{1}{2}$ 时正常返。

定理 7.28 (Galton-Watson 过程的灭绝)

设 Z 为后代分布 ν 的 Galton-Watson 过程, $Z_0 = 1$, $m = \sum_k k\nu(k)$, $g(s) = \sum_k \nu(k)s^k$, 并设 $\nu \neq \delta_1$ 。则灭绝概率 $q = \mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0)$ 是方程 $g(s) = s$ 在 $[0, 1]$ 中的最小根。特别地, $m \leq 1$ 时 $q = 1$; $m > 1$ 时

$q < 1$ 。若 $m < \infty$ ，则 Z_n/m^n 是非负鞅，a.s. 收敛。



证明 由独立性， $\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} | Z_n] = g(s)^{Z_n}$ ，故 $\mathbb{E}[s^{Z_n}] = g_n(s)$ ， $g_n = g \circ \dots \circ g$ (n 次)。 $\mathbb{P}(Z_n = 0) = g_n(0)$ 递增收敛到 q ，由 g 的连续性 $g(q) = q$ 。若 $r \in [0, 1]$ 满足 $g(r) = r$ ，则 $g_n(0) \leq g_n(r) = r$ ，故 $q \leq r$ 。 g 在 $[0, 1]$ 上凸， $g(1) = 1$ ， $g'(1-) = m$ 。若 $m \leq 1$ 且 $\nu \neq \delta_1$ ，则 g 在 $[0, 1)$ 上严格位于对角线上方（若 $\nu(0) + \nu(1) = 1$ ， g 是直线 $\nu(0) + \nu(1)s$ ， $\nu(0) > 0$ ；否则 g 严格凸且 $g'(s) < g'(1-) \leq 1$ ），故 $q = 1$ 。若 $m > 1$ ， $g(s) < s$ 对接近 1 的 $s < 1$ 成立，而 $g(0) \geq 0$ ，由介值定理存在 $[0, 1)$ 中的根。最后 $\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = mZ_n$ 。

命题 7.29

在定理 7.28 中设 $1 < m < \infty$ 且 $\sigma^2 = \text{Var}(\xi) < \infty$ 。则 $W = \lim Z_n/m^n$ 满足 $\mathbb{E}W = 1$ ，且 a.s. $\{W > 0\} = \{\text{过程不灭}\}$ 。



证明 由条件方差公式， $\mathbb{E}[Z_{n+1}^2 | Z_n] = m^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n$ ，故 $W_n = Z_n/m^n$ 满足 $\mathbb{E}W_{n+1}^2 = \mathbb{E}W_n^2 + \sigma^2 m^{-n-2}$ ， $\sup_n \mathbb{E}W_n^2 < \infty$ 。由定理 6.13， $W_n \rightarrow W$ 于 L^2 ， $\mathbb{E}W = 1$ 。令 $r = \mathbb{P}(W = 0)$ 。给定第一代 $Z_1 = k$ ，各子树独立， W 是 k 个独立的、与 W 同分布的变量之和除以 m ，故 $r = \sum_k \nu(k)r^k = g(r)$ 。由 $\mathbb{E}W = 1$ ， $r < 1$ ，而 g 在 $[0, 1)$ 中只有一个不动点 q (g 严格凸， $g(1) = 1$)，故 $r = q$ 。灭绝蕴含 $W = 0$ ，两个事件概率相同，故 a.s. 相等。

7.7 随机游走

本节中 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 独立同分布， $S_0 = 0$ ， $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ 。这一节对应 Kemeny–Snell–Knapp 第 5 章中关于独立随机变量之和的部分。

定义 7.30

设 ξ_i 取值于可测空间 F 。事件 $A = \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in C\}$ ($C \subset F^{\mathbb{N}^*}$ 可测) 称为可交换的，若对 $\mathbb{N}^*$ 的每个只移动有限多个元素的置换 ρ ， $\{(\xi_{\rho(1)}, \xi_{\rho(2)}, \dots) \in C\} = A$ 。



尾事件都是可交换的；但 $\{S_n = 0 \text{ 对无穷多个 } n\}$ 、 $\{\limsup S_n > 0\}$ 是可交换而一般不是尾事件。

定理 7.31 (Hewitt–Savage 0-1 律)

可交换事件的概率为 0 或 1。



证明 令 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 。由 Lévy 上升定理 (推论 6.16)， $\mathbb{P}(A | \mathcal{F}_n) \rightarrow \mathbf{1}_A$ 于 L^1 ；令 $A_n = \{\mathbb{P}(A | \mathcal{F}_n) > \frac{1}{2}\} \in \mathcal{F}_n$ ，则 $\mathbb{P}(A \Delta A_n) \leq 2\mathbb{E}|\mathbb{P}(A | \mathcal{F}_n) - \mathbf{1}_A| \rightarrow 0$ 。写 $A_n = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in C_n\}$ ，令 ρ_n 为交换 i 与 $n+i$ ($i \leq n$) 的置换， $A'_n = \{(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n}) \in C_n\}$ 。由于 $(\xi_{\rho_n(i)})_i \stackrel{(d)}{=} (\xi_i)_i$ ，且 A 在 ρ_n 下不变， $\mathbb{P}(A \Delta A'_n) = \mathbb{P}(A \Delta A_n) \rightarrow 0$ 。而 A_n 与 A'_n 独立，故 $\mathbb{P}(A) = \lim \mathbb{P}(A_n \cap A'_n) = \lim \mathbb{P}(A_n)^2 = \mathbb{P}(A)^2$ 。

推论 7.32 (一维随机游走的四分法)

设 ξ_i 为实值。则以下情形恰有一种 a.s. 成立：(i) $S_n = 0$ 对一切 n ；(ii) $S_n \rightarrow +\infty$ ；(iii) $S_n \rightarrow -\infty$ ；(iv) $\liminf S_n = -\infty$ 且 $\limsup S_n = +\infty$ 。



证明 $\limsup S_n$ 关于可交换事件可测，由 Hewitt–Savage 0-1 律 a.s. 等于常数 $c \in [-\infty, \infty]$ 。而 $(S_{n+1} - \xi_1)_n \stackrel{(d)}{=} (S_n)_n$ ，故 $c = \xi_1 + c$ a.s.；若 c 有限，则 $\xi_1 = 0$ a.s.，即情形 (i)。否则 $c = \pm\infty$ ；对 $\liminf$ 同理。 $c = -\infty$ 与 $\liminf = +\infty$ 不能同时成立，余下的组合恰为 (ii)(iii)(iv)。

若 $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$ ，由强大数定律， $\mathbb{E}\xi_1 > 0$ 时为 (ii)， $\mathbb{E}\xi_1 < 0$ 时为 (iii)。若 ξ_i 取整数值， $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ 且 $\xi_1 \neq 0$ ，则由下面的定理 7.34，游走常返 (0 被访问无穷多次)，从而为 (iv)。

下面设 ξ_i 取值于 $\mathbb{Z}^d$ ， S 是 $\mathbb{Z}^d$ 上的随机游走 (例 7.1(2))， $G(0, x) = \sum_n \mathbb{P}(S_n = x)$ 。我们称游走常返，若 0

是常返态, 即 $G(0, 0) = \infty$ 。记 $G_N(0, x) = \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_n = x)$ 。

引理 7.33

$G_N(0, x) \leq G_N(0, 0)$ 对一切 x 与 N 成立。



证明 由强马氏性 (在 T_x 处), $\sum_{n \leq N} \mathbf{1}_{\{S_n=x\}} \leq \mathbf{1}_{\{T_x \leq N\}} \sum_{m=0}^N \mathbf{1}_{\{S_{T_x+m}-S_{T_x}=0\}}$, 取期望得 $G_N(0, x) \leq \mathbb{P}(T_x \leq N)G_N(0, 0)$ 。

定理 7.34 (Chung–Fuchs)

(1) 设 $d = 1$ 。若 $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ (特别地, 若 $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$ 且 $\mathbb{E}\xi_1 = 0$) , 则游走常返。(2) 设 $d = 2$ 。若 $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, K)$, K 可逆 (特别地, 若 $\mathbb{E}|\xi_1|^2 < \infty$, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, 且协方差矩阵可逆), 则游走常返。



证明 (1) 固定 $\varepsilon > 0$ 。由引理 7.33,

$$(2\varepsilon N + 1)G_N(0, 0) \geq \sum_{|x| \leq \varepsilon N} G_N(0, x) = \sum_{n \leq N} \mathbb{P}(|S_n| \leq \varepsilon N) \geq \sum_{n \leq N} \mathbb{P}(|S_n| \leq \varepsilon n).$$

右边各项趋于 1, 故右边 $\geq N(1 - o(1))$, 于是 $G(0, 0) \geq \liminf_N G_N(0, 0) \geq \frac{1}{2\varepsilon}$ 。令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。

(2) 取 $M \in (0, 1)$ 。 $\#\{x \in \mathbb{Z}^2 : |x| \leq M\sqrt{N}\} \leq (2M\sqrt{N} + 1)^2 \leq 9M^2 N$ (当 $M\sqrt{N} \geq 1$)。由引理 7.33,

$$9M^2 N G_N(0, 0) \geq \sum_{n \leq N} \mathbb{P}(|S_n| \leq M\sqrt{N}) = N \int_0^1 \mathbb{P}(|S_{\lceil \theta N \rceil}| \leq M\sqrt{N}) d\theta.$$

对固定的 $\theta \in (0, 1]$, 由定理 4.8(4), $\liminf_N \mathbb{P}(|S_{\lceil \theta N \rceil}| \leq M\sqrt{N}) \geq \mathbb{P}(|Z| < M/\sqrt{\theta})$, $Z \sim \mathcal{N}(0, K)$ 。 Z 的密度在单位圆盘上 $\geq c > 0$, 故对 $\theta \geq M^2$, $\mathbb{P}(|Z| < M/\sqrt{\theta}) \geq c\pi M^2/\theta$ 。由 Fatou 引理,

$$\liminf_N G_N(0, 0) \geq \frac{1}{9M^2} \int_{M^2}^1 \frac{c\pi M^2}{\theta} d\theta = \frac{c\pi}{9} \log \frac{1}{M^2}.$$

令 $M \rightarrow 0$ 。

定理 7.35

设 $\phi(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\langle \theta, \xi_1 \rangle}]$ 。则

$$G(0, 0) = \lim_{s \uparrow 1} (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - s\phi(\theta)} d\theta.$$

若 $d \geq 3$ 且 ξ_1 的分布的支撑生成群 $\mathbb{Z}^d$ (例如游走不可约), 则游走暂留。



证明 与定理 7.11 的证明相同, $\sum_n s^n \mathbb{P}(S_n = 0) = (2\pi)^{-d} \int \frac{d\theta}{1 - s\phi(\theta)}$; 左边是实数, 故可取实部; 令 $s \uparrow 1$ 用单调收敛。设 $d \geq 3$ 。注意 $\operatorname{Re}(1 - s\phi) = 1 - s\operatorname{Re}\phi \geq s(1 - \operatorname{Re}\phi)$, 故 $\operatorname{Re} \frac{1}{1 - s\phi} \leq \frac{1}{|1 - s\phi|} \leq \frac{1}{s(1 - \operatorname{Re}\phi)}$ 。只需证 $\int (1 - \operatorname{Re}\phi)^{-1} d\theta < \infty$ 。若 $\operatorname{Re}\phi(\theta) = 1$, 则 $\langle \theta, x \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}$ 对支撑中的一切 x 成立, 从而对它生成的群 $\mathbb{Z}^d$ 成立, 故 $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}^d$; 所以 $1 - \operatorname{Re}\phi$ 在 $[-\pi, \pi]^d$ 中远离 0 处有正下界。在 0 附近: 取 R 使 $\{x \in \operatorname{supp} : |x| \leq R\}$ 张成 $\mathbb{R}^d$, 则二次型 $q(\theta) = \mathbb{E}[\langle \theta, \xi_1 \rangle^2 \mathbf{1}_{\{|\xi_1| \leq R\}}]$ 正定, $q(\theta) \geq c|\theta|^2$; 对 $|\theta| \leq \pi/R$, 由 $1 - \cos u \geq 2u^2/\pi^2$ ($|u| \leq \pi$), $1 - \operatorname{Re}\phi(\theta) \geq \frac{2}{\pi^2} q(\theta) \geq c'|\theta|^2$ 。 $d \geq 3$ 时 $|\theta|^{-2}$ 可积。

注 定理 7.35 表明: 在 $d \geq 3$ 时, 任何真正 d 维的随机游走都是暂留的, 无需矩条件。在 $d = 1, 2$ 时, 常返性依赖于矩条件: 例如 $d = 1$ 时, ξ_1 对称且 $\mathbb{P}(|\xi_1| > x) \sim x^{-\alpha}$ ($\alpha < 1$) 的游走是暂留的。

第 8 章 马氏链的位势理论与边界理论

本章介绍 Kemeny–Snell–Knapp 《Denumerable Markov Chains》的核心思想：暂留链的位势理论（Green 核、位势、上调和函数的 Riesz 分解、平衡测度与容量）、有限链的基本矩阵、Doob 的 h -变换，以及 Martin 边界——它用一个紧化把暂留链“走向无穷的方式”与正调和函数的积分表示统一起来。最后介绍马尔可夫随机游（Griffeath 所写的一章）的基本定理。

8.1 暂留链的位势

本节中 Q 是 E 上的次随机矩阵。我们添加一个墓碑点 $\partial \notin E$ ，令 $Q(x, \partial) = 1 - \sum_{y \in E} Q(x, y)$ ， $Q(\partial, \partial) = 1$ ，得到 $E \cup \{\partial\}$ 上的转移矩阵；相应的典范链记为 (X_n) ，寿命 $\zeta = \inf\{n : X_n = \partial\}$ 。 E 上的函数总是通过 $f(\partial) = 0$ 延拓，于是 $Qf(x) = \sum_{y \in E} Q(x, y)f(y) = \mathbb{E}_x[f(X_1)]$ 。对 $A \subset E$ ， $T_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ ， $H_A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}$ 。

定义 8.1

Green 核 $G(x, y) = \sum_{n \geq 0} Q^n(x, y) = \mathbb{E}_x[N_y]$ ， $x, y \in E$ 。若 $G(x, y) < \infty$ 对一切 $x, y \in E$ 成立，称 Q 暂留。对 $f : E \rightarrow [0, \infty]$ ， $Gf(x) = \sum_y G(x, y)f(y)$ 称为 f 的位势（ f 称为荷）。函数 $h : E \rightarrow [0, \infty)$ 若满足 $Qh \leq h$ ，称为上调和的（Kemeny–Snell–Knapp 称之为 superregular，在一般马氏过程理论中称为 excessive）。

由 $\sum_{n \geq 0} Q^n = I + Q \sum_{n \geq 0} Q^n$ 得

$$G = I + QG = I + GQ, \quad Gf = f + Q(Gf). \quad (8.1)$$

因此当 Gf 有限时， Gf 是上调和的，且 $Q^n(Gf) = \sum_{k \geq n} Q^k f \downarrow 0$ 。

定理 8.2 (Riesz 分解)

设 h 是有限上调和函数。则 $h = Gf + h_\infty$ ，其中 $f = h - Qh \geq 0$ ， $h_\infty = \lim_n \downarrow Q^n h$ 是调和的。这种把 h 写成“有限位势 + 非负调和函数”的分解是唯一的。 h 是位势（即 $h_\infty = 0$ ）当且仅当 $Q^n h \rightarrow 0$ 逐点成立。

证明 $h - Q^n h = \sum_{k < n} Q^k(h - Qh) = \sum_{k < n} Q^k f \uparrow Gf$ ，而 $Q^n h$ 递减到 h_∞ 。由于 $Q^n h \leq h$ 且 $Qh(x) < \infty$ ，由控制收敛 $Qh_\infty = \lim Q^{n+1} h = h_\infty$ 。唯一性：若 $h = Gg + k$ ， Gg 有限， k 调和，则 $Q^n h = Q^n Gg + k \rightarrow k$ ，故 $k = h_\infty$ ， $Gg = Gf$ ，再由 (8.1)， $g = Gg - QGg = f$ 。

命题 8.3 (扫除)

设 h 为有限上调和函数， $A \subset E$ 。令 $R_A h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_{T_A}); T_A < \zeta]$ （ h 在 A 上的约化函数）。则 $R_A h$ 上调和， $R_A h \leq h$ ， $R_A h = h$ 于 A ，在 $E \setminus A$ 上调和，并且 $R_A h$ 是所有在 A 上 $\geq h$ 的上调和函数中最小的。若 $f \geq 0$ 支撑于 A 且 Gf 有限，则 $R_A(Gf) = Gf$ 。

证明 若 u 上调和，则 $u(X_n)$ 是 $\mathbb{P}_x$ -非负上鞅（命题 7.25， $u(\partial) = 0$ ），由定理 6.18，对任何停时 $S \leq T$ ， $\mathbb{E}_x[u(X_T)] \leq \mathbb{E}_x[u(X_S)]$ （在 $\{T = \infty\}$ 上 $u(X_T)$ 理解为上鞅的极限，它非负）。因此若 $u \geq h$ 于 A ，则 $u(x) \geq \mathbb{E}_x[u(X_{T_A}); T_A < \zeta] \geq R_A h(x)$ 。特别地 $R_A h \leq h$ 。显然 $R_A h = h$ 于 A 。由马氏性， $QR_A h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_{H_A}); H_A < \zeta]$ ，而 $H_A \geq T_A$ ，对上鞅 $h(X_n)$ 用可选停止得 $QR_A h \leq R_A h$ ；当 $x \notin A$ 时 $H_A = T_A$ ，故等号成立。最后，若 f 支撑于 A ，则 $N_y = N_y \circ \theta_{T_A}$ （ $y \in A$ ），由强马氏性 $Gf(x) = \mathbb{E}_x[Gf(X_{T_A}); T_A < \zeta]$ 。

推论 8.4 (控制原理)

设 $f \geq 0$ 支撑于 A ， Gf 有限， h 上调和。若 $Gf \leq h$ 于 A ，则 $Gf \leq h$ 处处成立。

证明 $Gf = R_A(Gf) \leq R_A h \leq h$ (R_A 显然单调)。

设 Q 暂留, $A \subset E$ 有限。由命题 7.8(2) (对次随机链同样成立), 链 a.s. 只访问 A 有限次, 故末离时 $L_A = \sup\{n < \zeta : X_n \in A\}$ 在 $\{T_A < \zeta\}$ 上有限。令

$$e_A(y) = \mathbf{1}_A(y) \mathbb{P}_y(H_A \geq \zeta) \quad (\text{从 } y \text{ 出发不再回到 } A \text{ 的概率}).$$

命题 8.5 (末离分解)

对 $x \in E, y \in A, \mathbb{P}_x(T_A < \zeta, X_{L_A} = y) = G(x, y)e_A(y)$ 。因此

$$\mathbb{P}_x(T_A < \zeta) = Ge_A(x) = \sum_{y \in A} G(x, y)e_A(y).$$

e_A 称为 A 的平衡测度, $\text{Cap}(A) = \sum_y e_A(y)$ 称为 A 的容量。

证明 $\{L_A = n, X_n = y\} = \{X_n = y\} \cap \theta_n^{-1}\{H_A \geq \zeta\}$, 由马氏性其概率为 $Q^n(x, y)e_A(y)$, 对 n 求和。

于是 $x \mapsto \mathbb{P}_x(T_A < \zeta)$ 是由支撑于 A 的荷产生的位势, 在 A 上等于 1, 它是 $R_A \mathbf{1}$ 。这是经典位势论中“导体的平衡电荷分布”的离散类比。

8.2 吸收链与有限链的基本矩阵

设 $E = T \cup B$, T 有限, B 中的状态都是吸收态, 且从每个 $x \in T$ 出发 a.s. 最终被吸收。令 Q_T 为 Q 在 $T \times T$ 上的限制 (次随机矩阵), $R = (Q(x, b))_{x \in T, b \in B}$ 。

命题 8.6

$I - Q_T$ 可逆, $N := (I - Q_T)^{-1} = \sum_n Q_T^n$ (基本矩阵), $N(x, y)$ 是从 x 出发、被吸收前访问 y 的平均次数。被吸收前的平均步数为 $t = N\mathbf{1}$, 被 b 吸收的概率为 $(NR)(x, b)$ 。

证明 $Q_T^n(x, y) = \mathbb{P}_x(X_n = y) \ (y \in T)$, 故 $\sum_n Q_T^n(x, y) = \mathbb{E}_x[N_y]$ 。由于 T 有限且 $T_B < \infty$ a.s., 每个 $y \in T$ 暂留, G 有限 (命题 7.8), 于是 $Q_T^n \rightarrow 0$, 由 (8.1) $(I - Q_T)N = N(I - Q_T) = I$ 。 $t(x) = \mathbb{E}_x[T_B] = \sum_{y \in T} N(x, y)$ 。被 b 吸收的概率 = $\sum_n \sum_{y \in T} \mathbb{P}_x(X_n = y) Q(y, b) = (NR)(x, b)$ 。

设 E 有限, Q 不可约, π 为不变概率 (定理 7.16, 有限不可约链必常返: 有限个状态不可能都只被访问有限次)。令 $\Pi = \mathbf{1}\pi$ (每行都等于 π 的矩阵)。

定理 8.7 (基本矩阵与平均首达时间)

$I - Q + \Pi$ 可逆。令 $Z = (I - Q + \Pi)^{-1}$, $m(x, y) = \mathbb{E}_x[T_y]$ 。则对一切 $x, y \in E$,

$$m(x, y) = \frac{Z(y, y) - Z(x, y)}{\pi(y)}.$$

证明 若 $(I - Q + \Pi)v = 0$, 左乘 π ($\pi Q = \pi, \pi \Pi = \pi$) 得 $\pi v = 0$, 于是 $\Pi v = 0, Qv = v$ 。由定理 7.27 (应用于 $v + c$, c 为使之非负的常数), v 为常数, 再由 $\pi v = 0$ 得 $v = 0$ 。

由 $\pi(I - Q + \Pi) = \pi$ 得 $\pi Z = \pi$, 于是 $\Pi Z = \Pi, (I - Q)Z = I - \Pi Z = I - \Pi$ 。固定 y , 令 $u(x) = m(x, y)$, $w(x) = (Z(y, y) - Z(x, y))/\pi(y)$ 。由马氏性, $u(y) = 0, u(x) = 1 + Qu(x) \ (x \neq y)$, 且 $Qu(y) = \mathbb{E}_y[H_y] - 1 = 1/\pi(y) - 1$ 。故 $(I - Q)u = \mathbf{1} - \delta_y/\pi(y)$ 。另一方面, 记 $z_y = Z\delta_y$ 为 Z 的第 y 列, $(I - Q)z_y = \delta_y - \pi(y)\mathbf{1}$, 故 $(I - Q)w = -(I - Q)z_y/\pi(y) = \mathbf{1} - \delta_y/\pi(y)$ 。于是 $u - w$ 调和, 从而为常数, 而 $u(y) = w(y) = 0$ 。

8.3 常返链的位势: Poisson 方程

对常返链, Green 核 G 恒为无穷, 位势理论需要换一种形式 (Kemeny–Snell–Knapp 第 9 章)。其核心是 *Poisson* 方程 $(I - Q)u = f$, 其中“荷” f 的总量为零。

定理 8.8

设链不可约正常返, 不变概率为 π , $o \in E$ 。设 f 满足 $\sum_x \pi(x)|f(x)| < \infty$, $\sum_x \pi(x)f(x) = 0$ 。令

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{T_o-1} f(X_n) \right], \quad T_o = \inf \{n \geq 0 : X_n = o\}.$$

则 u 有限, $u(o) = 0$, 且 $u - Qu = f$ 。于是 $u(X_n) - u(X_0) + \sum_{k < n} f(X_k)$ 是鞅 (只要它可积, 例如 f 有界且 E 有限)。若 E 有限, 则 $u - \pi(u) = Zf$, $Z = (I - Q + \Pi)^{-1}$ 为定理 8.7 中的基本矩阵。

证明 由定理 7.14 与 7.16, $\mathbb{E}_o[\sum_{n < H_o} |f(X_n)|] = \sum_y \mu_o(y)|f(y)| = \pi(|f|)/\pi(o) < \infty$ 。对 $x \neq o$, 由强马氏性, $\mathbb{E}_o[\sum_{n < H_o} |f(X_n)|] \geq \mathbb{P}_o(T_x < H_o)\mathbb{E}_x[\sum_{n < T_o} |f(X_n)|]$, 而 $\mathbb{P}_o(T_x < H_o) > 0$ (不可约性与游程分解), 故 u 有限。对 $x \neq o$, $T_o = 1 + T_o \circ \theta_1$, 由马氏性 $u(x) = f(x) + Qu(x)$ 。在 o 处, $Qu(o) = \mathbb{E}_o[\sum_{1 \leq n < H_o} f(X_n)] = \mu_o(f) - f(o) = \pi(f)/\pi(o) - f(o) = -f(o)$, 即 $u(o) - Qu(o) = f(o)$ 。鞅性质: $\mathbb{E}[u(X_{n+1}) - u(X_n) + f(X_n) | \mathcal{F}_n] = Qu(X_n) - u(X_n) + f(X_n) = 0$ 。最后, 若 E 有限, $(I - Q)Zf = (I - \Pi)f = f$ (定理 8.7 的证明), 故 $u - Zf$ 调和, 为常数; 而 $\pi Z = \pi$, $\pi(Zf) = \pi(f) = 0$, 于是常数等于 $\pi(u)$ 。

推论 8.9 (马氏链的中心极限定理)

设 E 有限, 链不可约, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(f) = 0$, u 为定理 8.8 中的解。则对任何初始分布,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k < n} f(X_k) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \pi(u^2) - \pi((Qu)^2).$$

证明 由 $f = u - Qu$, $\sum_{k < n} f(X_k) = u(X_0) - u(X_n) + M_n$, $M_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $\xi_k = u(X_k) - Qu(X_{k-1})$ 是有界鞅差。 $\mathbb{E}[\xi_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = g(X_{k-1})$, $g = Q(u^2) - (Qu)^2$ 。由遍历定理 7.19, $\frac{1}{n} \sum_{k \leq n} g(X_{k-1}) \rightarrow \pi(g) = \pi(u^2) - \pi((Qu)^2)$ a.s. ($\pi Q = \pi$)。由定理 6.24 与 Slutsky 引理 (u 有界) 即得。

例 8.1 (一维简单随机游走的位势核) 对 $\mathbb{Z}$ 上的简单随机游走 (常返), $G \equiv \infty$, 但 Abel 和

$$a(x) = \lim_{s \uparrow 1} \sum_{n \geq 0} s^n (\mathbb{P}_0(X_n = 0) - \mathbb{P}_0(X_n = x))$$

存在且等于 $|x|$ 。确实, 由 $\mathbb{P}_0(X_n = x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta x) \cos^n \theta d\theta$, 对 $s < 1$, 左边的和等于 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos \theta x}{1 - s \cos \theta} d\theta$ 。被积函数非负, 在 $\{\cos \theta \geq 0\}$ 上被 $\frac{1 - \cos \theta x}{1 - \cos \theta}$ 控制, 在 $\{\cos \theta < 0\}$ 上被 2 控制, 而

$$\frac{1 - \cos \theta x}{1 - \cos \theta} = \frac{\sin^2(x\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = \left| \sum_{j=0}^{|x|-1} e^{ij\theta} \right|^2 \leq x^2$$

(Fejér 核), 其在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为 $2\pi|x|$ 。由控制收敛, $a(x) = |x|$ 。函数 a 满足 $(I - Q)a = -\delta_0$: 它在 $x \neq 0$ 处调和, 在 0 处 $Qa(0) - a(0) = 1$ 。这是 G (满足 $(I - Q)G = I$) 在常返情形下的替代物; Kemeny–Snell–Knapp 第 9 章对一般常返链发展了这一理论。对二维简单随机游走, 类似的位势核满足 $a(x) = \frac{2}{\pi} \log|x| + O(1)$ 。

8.4 Doob 的 h -变换

设 Q 为次随机矩阵, $h: E \rightarrow (0, \infty)$ 上调和。令

$$Q^h(x, y) = \frac{Q(x, y)h(y)}{h(x)}.$$

则 Q^h 是次随机矩阵, 且是随机矩阵当且仅当 h 调和。相应的链称为 h -过程, 其分布记为 $\mathbb{P}_x^h$ 。显然 $(Q^h)^n(x, y) = Q^n(x, y)h(y)/h(x)$, $G^h(x, y) = G(x, y)h(y)/h(x)$, 且对 $F \in \mathcal{F}_n$ ($\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$),

$$\mathbb{P}_x^h(F \cap \{n < \zeta\}) = \frac{\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_F h(X_n); n < \zeta]}{h(x)}. \quad (8.2)$$

(对 $F = \{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$ 直接验证, 再取可数不交并。)

例 8.2 (条件化) 设 $A \subset E$, $h(x) = \mathbb{P}_x(T_A < \zeta) > 0$. h 上调和, 在 $E \setminus A$ 上调和。对 $F \in \mathcal{F}_n$, 由马氏性, $\mathbb{P}_x(F \cap \{n \leq T_A\} \mid T_A < \zeta) = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{F \cap \{n \leq T_A\}} h(X_n)]/h(x) = \mathbb{P}_x^h(F \cap \{n \leq T_A\})$ 。即: 直到击中 A 为止, h -过程就是“以击中 A 为条件”的原链。例如对 $\{0, \dots, N\}$ 上的简单随机游走 ($0, N$ 吸收), 以“在 N 处被吸收”为条件的链是转移概率为 $Q^h(k, k \pm 1) = \frac{k \pm 1}{2k}$ 的链 ($h(k) = k/N$)。

8.5 Martin 边界

本节设 Q 是 E 上不可约、暂留的转移矩阵 (随机矩阵), $o \in E$ 为固定的参考点。由不可约性 $G(x, y) > 0$, 且由强马氏性 $G(o, y) \geq \mathbb{P}_o(T_x < \infty)G(x, y)$ 。

定义 8.10

Martin 核为 $K(x, y) = \frac{G(x, y)}{G(o, y)}$, $x, y \in E$ 。



对每个 x , $K(x, y) \leq C_x := 1/\mathbb{P}_o(T_x < \infty) < \infty$ 对一切 y 成立, $K(o, \cdot) \equiv 1$ 。

把 E 编号为 $\{x_1, x_2, \dots\}$, 对 $y, y' \in E$ 令

$$\rho(y, y') = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \left(\frac{|K(x_i, y) - K(x_i, y')|}{C_{x_i}} + |\mathbf{1}_{\{y=x_i\}} - \mathbf{1}_{\{y'=x_i\}}| \right).$$

ρ 是 E 上的度量; 每个点 x_i 是孤立点 (与其他点的距离 $\geq 2^{-i}$)。映射 $y \mapsto (K(x_i, y)/C_{x_i}, \mathbf{1}_{\{y=x_i\}})_{i \geq 1}$ 是从 (E, ρ) 到紧空间 $([0, 1]^2)^{\mathbb{N}^*}$ (配加权 ℓ^1 度量, 它诱导乘积拓扑) 的等距嵌入, 故 (E, ρ) 完全有界, 其完备化 $\hat{E}$ 是紧度量空间, 称为 *Martin* 紧化; $\mathcal{M} = \hat{E} \setminus E$ 称为 *Martin* 边界。 E 在 $\hat{E}$ 中是开的离散子集。 E 中的序列 (y_n) 收敛到 $\xi \in \mathcal{M}$, 当且仅当 y_n 最终离开每个有限集, 且对每个 x , $K(x, y_n)$ 收敛; 此时极限记为 $K(x, \xi)$ 。于是每个 $K(x, \cdot)$ 延拓为 $\hat{E}$ 上的连续函数, 取值于 $[0, C_x]$, 且这些函数 (连同 E 中各点的示性函数) 分离 $\hat{E}$ 的点。

对 $\xi \in \mathcal{M}$ 与 $y_n \rightarrow \xi$, 由 (8.1), $\sum_z Q(x, z)K(z, y_n) = K(x, y_n) - \mathbf{1}_{\{x=y_n\}}/G(o, y_n)$, 由 Fatou 引理, $K(\cdot, \xi)$ 是上调和的。

定理 8.11 (收敛到边界)

对每个 $x \in E$, $\mathbb{P}_x$ -a.s. X_n 在 $\hat{E}$ 中收敛到一个取值于 $\mathcal{M}$ 的随机变量 X_∞ 。



证明 第一步: 时间反转。设 $A \subset E$ 有限, L_A 为末离时 (若 $T_A = \infty$ 则令 $L_A = -1$), 沿用命题 8.5 的记号。定义

$$\hat{Q}(y, z) = \frac{G(o, z)Q(z, y)}{G(o, y)}, \quad y, z \in E.$$

由 (8.1), $\sum_z \hat{Q}(y, z) = (G(o, y) - \mathbf{1}_{\{y=o\}})/G(o, y) \leq 1$ 。在 $\mathbb{P}_o$ 下令 $Y_k = X_{L_A-k}$ ($0 \leq k \leq L_A$), $Y_k = \dagger$ ($k > L_A$)。对 $y_0 \in A$, $y_1, \dots, y_k \in E$, 由马氏性,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_o(Y_0 = y_0, \dots, Y_k = y_k) &= \sum_{m \geq k} \mathbb{P}_o(X_{m-k} = y_k, \dots, X_m = y_0, L_A = m) \\ &= \sum_{m \geq k} Q^{m-k}(o, y_k) Q(y_k, y_{k-1}) \cdots Q(y_1, y_0) e_A(y_0) \\ &= G(o, y_0) e_A(y_0) \hat{Q}(y_0, y_1) \cdots \hat{Q}(y_{k-1}, y_k). \end{aligned}$$

由命题 7.3(2) (应用于以 $\dagger$ 为墓碑的次随机矩阵 $\hat{Q}$), (Y_k) 是转移矩阵为 $\hat{Q}$ 的 (被杀死的) 马氏链。

第二步: 上鞅。固定 x , 令 $f(y) = K(x, y)$, $f(\dagger) = 0$ 。由 (8.1),

$$\hat{Q}f(y) = \sum_z \frac{G(o, z)Q(z, y)}{G(o, y)} \cdot \frac{G(x, z)}{G(o, z)} = \frac{(GQ)(x, y)}{G(o, y)} = \frac{G(x, y) - \mathbf{1}_{\{x=y\}}}{G(o, y)} \leq f(y).$$

故 $f(Y_k)$ 是非负上鞅, 由定理 6.10 与单调收敛, 序列 $(f(Y_k))_{k \geq 0}$ 对 $[a, b]$ ($0 < a < b$) 的上穿次数的期望 $\leq a/(b-a)$ 。而 $f(Y_0), \dots, f(Y_{L_A})$ 是 $f(X_{L_A}), \dots, f(X_0)$, 其后的项为 0。所以有限序列 $f(X_0), \dots, f(X_{L_A})$ 对 $[a, b]$ 的下穿次数 D_A 满足 $\mathbb{E}_o[D_A] \leq a/(b-a)$ 。

第三步: 收敛。取有限集 $A_N \uparrow E$ 。由暂留性 $L_{A_N} < \infty$ a.s., 且对任意 m , $X_m \in A_N$ 对充分大的 N 成立, 故 $L_{A_N} \rightarrow \infty$ 。由单调收敛, 整条序列 $(f(X_n))_{n \geq 0}$ 的下穿次数的期望 $\leq a/(b-a)$, 故 a.s. 有限。下穿与上穿次数至多差 1, 由引理 6.9, $K(x, X_n)$ 在 $\mathbb{P}_o$ 下 a.s. 收敛 (它有界)。对可数个 x 同时成立。又由暂留性 X_n 最终离开每个有限集。因此 (X_n) 是 ρ -Cauchy 列, 在 $\hat{E}$ 中收敛到 $\mathcal{M}$ 中的某点。

第四步: 一般起点。令 C 为 “ X_n 在 $\hat{E}$ 中收敛到 $\mathcal{M}$ 中的点” 这一事件, 它满足 $\mathbf{1}_C \circ \theta_n = \mathbf{1}_C$ 。由不可约性 $\mathbb{P}_o(T_x < \infty) > 0$, 由强马氏性 $\mathbb{P}_o(T_x < \infty) = \mathbb{P}_o(C \cap \{T_x < \infty\}) = \mathbb{P}_o(T_x < \infty)\mathbb{P}_x(C)$, 故 $\mathbb{P}_x(C) = 1$ 。

定理 8.12 (调和测度)

令 $\nu_x = \mathbb{P}_x(X_\infty \in \cdot)$ 为 $\mathcal{M}$ 上的概率测度。则 $\nu_x(d\xi) = K(x, \xi)\nu_o(d\xi)$ 。

证明 对有限集 A 与 $y \in A$, 由命题 8.5, $\mathbb{P}_x(T_A < \infty, X_{L_A} = y) = G(x, y)e_A(y) = K(x, y)\mathbb{P}_o(T_A < \infty, X_{L_A} = y)$ 。故对 $\hat{E}$ 上的连续函数 φ ,

$$\mathbb{E}_x[\varphi(X_{L_A}); T_A < \infty] = \mathbb{E}_o[K(x, X_{L_A})\varphi(X_{L_A}); T_A < \infty].$$

取 $A = A_N \uparrow E$: $L_{A_N} \rightarrow \infty$, 故 $X_{L_{A_N}} \rightarrow X_\infty$ a.s., 而 $\mathbb{P}(T_{A_N} < \infty) \rightarrow 1$ 。 $K(x, \cdot)\varphi$ 在 $\hat{E}$ 上有界连续, 由控制收敛 $\mathbb{E}_x[\varphi(X_\infty)] = \mathbb{E}_o[K(x, X_\infty)\varphi(X_\infty)]$ 。由命题 1.14 即得。

定理 8.13 (正调和函数的 Martin 表示)

设 $h > 0$ 调和。则 h -过程 (随机矩阵 Q^h) 不可约暂留, 其 Martin 紧化与 Q 的相同, 且

$$h(x) = \int_{\mathcal{M}} K(x, \xi) \mu^h(d\xi), \quad \mu^h := h(o) \mathbb{P}_o^h(X_\infty \in \cdot).$$

更一般地, 每个有限正上调和函数 u 都可写成 $u(x) = \int_{\hat{E}} K(x, \xi) \mu(d\xi)$, 其中 μ 是 $\hat{E}$ 上的有限测度。

证明 $G^h(x, y) = G(x, y)h(y)/h(x)$ 有限且为正, 故 Q^h 不可约暂留, 其 Martin 核为 $K^h(x, y) = K(x, y)h(o)/h(x)$ 。对每个 x , $K^h(x, \cdot)$ 是 $K(x, \cdot)$ 的正常数倍, 因此 E 中序列在两个度量下的 Cauchy 性相同, 两个完备化自然同胚, 且 $K^h(x, \xi) = K(x, \xi)h(o)/h(x)$ 于 $\mathcal{M}$ 。对 h -过程用定理 8.11 与 8.12, 并对 $\varphi \equiv 1$: $1 = \int K^h(x, \xi) \mathbb{P}_o^h(X_\infty \in d\xi)$, 即 $h(x) = h(o) \int K(x, \xi) \mathbb{P}_o^h(X_\infty \in d\xi)$ 。

对上调和 u , 由 Riesz 分解 $u = Gf + u_\infty$, $Gf(x) = \sum_y K(x, y)G(o, y)f(y)$ 是 $K(x, \cdot)$ 关于 E 上有限测度 $G(o, y)f(y)$ (总质量 $Gf(o) \leq u(o)$) 的积分; 若 $u_\infty \not\equiv 0$, 则由不可约性 $u_\infty > 0$, 对它用第一部分。

定理 8.14 (有界调和函数与 Poisson 边界)

对每个有界调和函数 h , 存在 $\mathcal{M}$ 上有界可测函数 φ (在 ν_o -a.e. 意义下唯一) 使

$$h(x) = \mathbb{E}_x[\varphi(X_\infty)] = \int_{\mathcal{M}} K(x, \xi) \varphi(\xi) \nu_o(d\xi),$$

并且 $h(X_n) \rightarrow \varphi(X_\infty)$ $\mathbb{P}_x$ -a.s. 反之, 每个这样的积分都定义有界调和函数。

证明 反之的部分: 由马氏性与 $X_\infty \circ \theta_1 = X_\infty$, $Qh(x) = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_1}[\varphi(X_\infty)]] = \mathbb{E}_x[\varphi(X_\infty) \circ \theta_1] = h(x)$ 。

设 h 有界调和。因为常数是调和的, 可以作仿射变换使 $1 \leq h \leq 2$ 。由命题 7.25 与定理 6.13, $h(X_n) \rightarrow H$ $\mathbb{P}_x$ -a.s. 且于 L^1 。由 (8.2), 对 $F \in \mathcal{F}_n$, $\mathbb{P}_x^h(F) = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_F h(X_n)]/h(x) = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_F H]/h(x)$; 两边都是 F 的有限测度,

在 π -系 $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ 上相等, 从而在 $\mathcal{F}$ 上相等. 取 $F = \{X_\infty \in B\}$ 并用定理 8.13:

$$\mu^h(B) = h(o) \mathbb{P}_o^h(X_\infty \in B) = \mathbb{E}_o[H; X_\infty \in B] = \int_B \varphi d\nu_o, \quad \varphi(\xi) := \mathbb{E}_o[H \mid X_\infty = \xi] \in [1, 2].$$

再由定理 8.13 与 8.12, $h(x) = \int K(x, \xi) \varphi(\xi) \nu_o(d\xi) = \mathbb{E}_x[\varphi(X_\infty)]$. 由马氏性 $h(X_n) = \mathbb{E}_{X_n}[\varphi(X_\infty)] = \mathbb{E}_x[\varphi(X_\infty) \mid \mathcal{F}_n]$, 由 Lévy 上升定理它收敛到 $\varphi(X_\infty)$. 唯一性: 若 $\mathbb{E}_x[\varphi(X_\infty)] = 0$ 对一切 x , 则同理 $0 = \mathbb{E}_o[\varphi(X_\infty) \mid \mathcal{F}_n] \rightarrow \varphi(X_\infty)$, 故 $\varphi = 0$ ν_o -a.e.

于是“有界调和函数”与“ $L^\infty(\mathcal{M}, \nu_o)$ ”之间有一一对应, $(\mathcal{M}, \nu_o)$ 实现了链的 Poisson 边界。

定义 8.15

正调和函数 h 称为极小的, 若对每个满足 $0 \leq h' \leq h$ 的调和函数 h' , 存在常数 c 使 $h' = ch$.

定理 8.16

若 h 是极小调和函数, $h(o) = 1$, 则存在 $\xi \in \mathcal{M}$ 使 $h = K(\cdot, \xi)$, 且 $\mathbb{P}_x^h$ -a.s. $X_\infty = \xi$.

证明 对 Borel 集 $B \subset \mathcal{M}$, 令 $h_B(x) = h(x) \mathbb{P}_x^h(X_\infty \in B)$. 由 h -过程的马氏性与 $X_\infty \circ \theta_1 = X_\infty$, $Q^h(\mathbb{P}^h(X_\infty \in B)) = \mathbb{P}^h(X_\infty \in B)$, 即 h_B 关于 Q 调和, 且 $0 \leq h_B \leq h$. 由极小性 $\mathbb{P}_x^h(X_\infty \in B) = c_B$ 不依赖于 x . 由 Lévy 上升定理, $c_B = \mathbb{P}_{X_n}^h(X_\infty \in B) = \mathbb{P}_o^h(X_\infty \in B \mid \mathcal{F}_n) \rightarrow \mathbf{1}_B(X_\infty)$, 故 $c_B \in \{0, 1\}$. 于是 $\mathcal{M}$ 上的概率测度 $\mathbb{P}_o^h(X_\infty \in \cdot)$ 只取值 0, 1. 对每个 k , 把紧空间 $\mathcal{M}$ 划分为有限个直径 $< 1/k$ 的不交 Borel 集, 其中恰有一个集合 B_k 的测度为 1. $\bigcap_k B_k$ 的测度为 1 且直径为 0, 故它是单点集 $\{\xi\}$, 所求测度为 δ_ξ . 由定理 8.13, $h = K(\cdot, \xi)$.

注 令 $\mathcal{M}_{\min} = \{\xi \in \mathcal{M} : K(\cdot, \xi) \text{ 是极小调和函数}\}$ (极小 Martin 边界). 可以证明 $\nu_o(\mathcal{M}_{\min}) = 1$, 且每个正调和函数在 $\mathcal{M}_{\min}$ 上的表示测度是唯一的 (Kemeny–Snell–Knapp 第 10 章, 或 Woess [19]). 本讲义不使用这些结论。

定理 8.17 (Fatou 型比值极限定理)

设 $h > 0$ 调和, $u \geq 0$ 上调和. 则对每个 x , $\mathbb{P}_x^h$ -a.s. $\lim_n u(X_n)/h(X_n)$ 存在且有限.

证明 $Q^h(u/h)(y) = \sum_z Q(y, z)u(z)/h(y) = Qu(y)/h(y) \leq u(y)/h(y)$, 故 u/h 是 Q^h -上调和的非负函数, $u(X_n)/h(X_n)$ 是 $\mathbb{P}_x^h$ -非负上鞅 (命题 7.25), 由定理 6.11 收敛。

这是经典 Fatou 定理 (单位圆盘中的正调和函数之比沿“几乎每条”趋于边界的路径有极限) 的离散类比: h -过程扮演“趋于边界上 μ^h -几乎每一点”的角色. 取 $h \equiv 1$, u 有界调和, 就回到定理 8.14 中的 $h(X_n) \rightarrow \varphi(X_\infty)$.

例 8.3 (带漂移的随机游走) 设 $E = \mathbb{Z}$, $Q(x, x+1) = p > \frac{1}{2}$, $Q(x, x-1) = q = 1-p$, $o = 0$. 令 $r = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty)$. 函数 $u(x) = (q/p)^{x^+}$ 满足 $u(0) = 1$ 且在每个 $x \neq 0$ 处调和 ($x \geq 1$ 时 $p(q/p)^{x+1} + q(q/p)^{x-1} = (q/p)^x$; $x \leq -1$ 时 u 在 $x, x \pm 1$ 处都等于 1), 由定理 7.26 的最小性 $r \leq q/p < 1$; 由强马氏性 $\mathbb{P}_2(T_0 < \infty) = r^2$, 再由马氏性 $r = q + pr^2$, 其根为 1 与 q/p , 故 $r = q/p$. 由此 $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = (q/p)^{x-y}$ ($y < x$), $= 1$ ($y \geq x$, 链 a.s. 趋于 $+\infty$ ——强大数定律), $\mathbb{P}_y(H_y = \infty) = p(1 - q/p) = p - q$, 于是

$$G(x, y) = \frac{1}{p - q} \quad (y \geq x), \quad G(x, y) = \frac{(q/p)^{x-y}}{p - q} \quad (y < x).$$

所以 $K(x, y) \rightarrow 1$ ($y \rightarrow +\infty$), $K(x, y) \rightarrow (q/p)^x$ ($y \rightarrow -\infty$): Martin 边界由两点 $\{+\infty, -\infty\}$ 组成. $X_\infty = +\infty$ a.s., $\nu_o = \delta_{+\infty}$, 故有界调和函数都是常数; 而正调和函数恰为 $a + b(q/p)^x$ ($a, b \geq 0$).

例 8.4 (齐次树的 Martin 边界) 设 $\mathbb{T}$ 是每个顶点度数为 $q+1$ ($q \geq 2$) 的无穷树, $d(x, y)$ 为图距离, Q 为简单随机游走, o 为根。

Green 函数. 设 $z \sim x$. 当 $X \neq z$ 时, X 恰有一个邻居比 X 更接近 z , 故 $D_n = d(X_n, z)$ 在击中 z 之前是以概率 $\frac{q}{q+1}$ 加一、 $\frac{1}{q+1}$ 减一的游走. 由例 8.3 ($p = \frac{q}{q+1}$), $\mathbb{P}_x(T_z < \infty) = 1/q$. 从 x 到 y 必须依次经过测地线上的各点, 由强马氏性 $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = q^{-d(x, y)}$, 于是 $G(x, y) = q^{-d(x, y)} G(o, o)$ (命题 7.8(3)), 链暂留, 且

$$K(x, y) = q^{d(o, y) - d(x, y)}.$$

端点. 从 o 出发的无自交无穷路径 (射线) 称为端点, 端点全体记为 $\partial\mathbb{T}$. 对端点 $\xi = (o = \xi_0, \xi_1, \dots)$ 与 $x \in \mathbb{T}$, 当 k 充分大时 $d(o, \xi_k) - d(x, \xi_k)$ 为常数, 记为 $h_\xi(x)$ (Busemann 函数): 若 $x \wedge \xi$ 是 x 到 o 的测地线与 ξ

的最后公共点, 则 $h_\xi(x) = 2d(o, x \wedge \xi) - d(o, x)$ 。

Martin 紧化。 设 $y_n \in \mathbb{T}$ 离开每个有限集。若 y_n 收敛到端点 ξ (即对每个 k , 当 n 充分大时 o 到 y_n 的测地线经过 ξ_k), 则 $K(x, y_n) = q^{h_{\xi_k}(x)}$ 对充分大的 n 成立。反之, 由 König 引理 (每个顶点只有有限个邻居), 每个这样的序列都有收敛到某个端点的子列; 不同端点 $\xi \neq \eta$ 给出不同的函数 q^{h_ξ} (在 ξ 上远离分叉点处 $h_\xi \neq h_\eta$)。因此 (y_n) 在 Martin 拓扑中收敛当且仅当它收敛到某个端点, Martin 边界可等同于 $\partial\mathbb{T}$, $K(x, \xi) = q^{h_\xi(x)}$ 。

调和测度。 由定理 8.11, X_n a.s. 收敛到一个随机端点 X_∞ 。由对称性 (o 的稳定子群在每一层上可迁地作用), ν_o 是 $\partial\mathbb{T}$ 上的“均匀测度”: 经过 o 的第 k 层某个指定顶点的端点集的测度为 $\frac{1}{(q+1)q^{k-1}}$ 。由定理 8.14, 有界调和函数与 $L^\infty(\partial\mathbb{T}, \nu_o)$ 一一对应; 特别地, 树上存在大量非常数有界调和函数, 例如 $x \mapsto \mathbb{P}_x(X_\infty \in B)$ 。这与 $\mathbb{Z}^d$ 上的简单随机游走 (其有界调和函数都是常数) 形成鲜明对比。

8.6 可逆链与电网络

Kemeny–Snell–Knapp 第 8 章讨论了暂留链的能量与容量。对可逆链, 这些概念有一个漂亮的物理解释: 电网络。

设 E 可数, $c: E \times E \rightarrow [0, \infty)$ 对称 (电导), $c(x) := \sum_y c(x, y) \in (0, \infty)$, 并设图 $\{(x, y) : c(x, y) > 0\}$ 连通。令 $Q(x, y) = c(x, y)/c(x)$ 。则 Q 不可约, $c(\cdot)$ 是可逆测度。反之, 每个具有可逆测度 μ 的不可约链都可以这样表示 (取 $c(x, y) = \mu(x)Q(x, y)$)。例如图上的简单随机游走对应于每条边电导为 1。

对 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 定义 *Dirichlet* 能量

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{2} \sum_{x, y} c(x, y) (f(x) - f(y))^2 \in [0, \infty].$$

若 f 有限支撑, 由对称性展开得离散 *Green* 公式: 对有限支撑的 f, g ,

$$\mathcal{D}(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{x, y} c(x, y) (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) = \sum_x c(x) f(x) (g - Qg)(x). \quad (8.3)$$

(当 g 不是有限支撑但 $\sum_y c(x, y)|g(y)| < \infty$ 时, 只要 f 有限支撑, 同样成立。)

定理 8.18 (Dirichlet 原理)

对 $a \in E$,

$$c(a) \mathbb{P}_a(H_a = \infty) = \inf\{\mathcal{D}(f) : f \text{ 有限支撑}, f(a) = 1\}.$$

因此链暂留当且仅当右边的下确界为正。右边称为 $\{a\}$ 的容量, 其倒数称为从 a 到无穷远的有效电阻。❤

证明 设 $F \ni a$ 为有限集, $\tau = \inf\{n : X_n \notin F\}$ 。令 $v(x) = \mathbb{P}_x(T_a < \tau)$, 则 $v(a) = 1$, $v = 0$ 于 F^c , v 在 $F \setminus \{a\}$ 上调和 (马氏性), 且 $(v - Qv)(a) = 1 - \mathbb{P}_a(H_a < \tau) = \mathbb{P}_a(\tau < H_a)$ 。 ($\tau < \infty$ a.s.: 有限集中的不可约链不能永远停留——若 $F^c \neq \emptyset$; 若 E 有限则链常返, 结论两边都为 0。) 由 (8.3), $\mathcal{D}(v) = c(a)\mathbb{P}_a(\tau < H_a)$ 。若 f 支撑于 F , $f(a) = 1$, 写 $f = v + g$, $g(a) = 0$, $g = 0$ 于 F^c , 则 $\mathcal{D}(v, g) = \sum_x c(x)g(x)(v - Qv)(x) = 0$, 故 $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(v) + \mathcal{D}(g) \geq \mathcal{D}(v)$ 。所以支撑于 F 的函数中的最小能量为 $c(a)\mathbb{P}_a(\tau_F < H_a)$ 。取有限集 $F_n \uparrow E$, 事件 $\{\tau_{F_n} < H_a\}$ 递减到 $\{H_a = \infty\}$ (若 $H_a < \infty$, 路径在 H_a 之前只经过有限个点; 若 $H_a = \infty$, 链 a.s. 离开每个有限集——暂留时由命题 7.8, 常返时这个事件是零集)。令 $n \rightarrow \infty$ 即得。

推论 8.19 (Rayleigh 单调性)

设 $c \leq c'$ 是同一顶点集上的两组电导 (都满足上面的条件)。若 c' 对应的链常返, 则 c 对应的链也常返。特别地, 常返图的连通子图 (简单随机游走) 常返。❤

证明 $\mathcal{D}_c \leq \mathcal{D}_{c'}$, 由定理 8.18, 下确界为 0 的性质从 c' 传递到 c 。子图对应于把某些边的电导降为 0 (删去孤立点不影响结论; 子图上的游走的转移概率与“删边后的网络”一致)。

例 8.5 ($\mathbb{Z}^2$ 的常返性, 再证) 对 $N \geq 2$, 令 $f_N(x) = (1 - \frac{\log(1+|x|)}{\log(1+N)})^+$ ($|x|$ 为欧氏范数), $f_N(0) = 1$, 有限支撑。

对相邻的 x, y , $|f_N(x) - f_N(y)| \leq \frac{1}{(1+\min(|x|, |y|)) \log(1+N)}$, 且只有 $|x| \leq N+1$ 的边有贡献。故

$$\mathcal{D}(f_N) \leq \frac{C}{\log^2(1+N)} \sum_{|x| \leq N+1} \frac{1}{(1+|x|)^2} \leq \frac{C' \log N}{\log^2 N} \rightarrow 0.$$

由 Dirichlet 原理, $\mathbb{Z}^2$ 上的简单随机游走常返; 由 Rayleigh 单调性, $\mathbb{Z}^2$ 的任何连通子图 (如 $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$ 、六角格) 上的简单随机游走都常返。

定理 8.20 (树上的流判别法)

设 (E, c) 是以 a 为根的局部有限树。若存在端点空间 (从 a 出发的射线全体) 上的概率测度 θ , 使得

$$\sum_e \frac{\theta(e)^2}{c(e)} < \infty,$$

其中 e 取遍边, $\theta(e)$ 为经过 e 的射线的 θ -测度, 则链暂留。

证明 设 f 有限支撑, $f(a) = 1$ 。对每条射线 γ , f 沿 γ 从 1 降到 0, 故 $\sum_{e \in \gamma} |\nabla f(e)| \geq 1$ ($\nabla f(e)$ 为 f 在边 e 两端的差)。对 θ 积分并交换求和:

$$1 \leq \sum_e \theta(e) |\nabla f(e)| \leq \left(\sum_e c(e) |\nabla f(e)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_e \frac{\theta(e)^2}{c(e)} \right)^{1/2}.$$

故 $\mathcal{D}(f) \geq (\sum_e \theta(e)^2 / c(e))^{-1} > 0$, 由 Dirichlet 原理链暂留。

例 8.6 二叉树 (根的度数为 2, 其余顶点度数为 3) 上的简单随机游走暂留: 取 θ 为均匀测度, 第 n 层的 2^n 条边各有 $\theta(e) = 2^{-n}$, $\sum_e \theta(e)^2 = \sum_n 2^n 4^{-n} = 1 < \infty$ 。这与例 8.4 一致。更一般地, 若树的“分支数”大于 1, 取适当的 θ 即知其暂留。

注 定理 8.20 中的 θ 是“从 a 流向无穷远的单位电流”的一个例子, $\sum \theta(e)^2 / c(e)$ 是其能量。一般地 (Thomson 原理), 有效电阻等于所有单位流的最小能量, 最小值由真实电流 $i(x, y) = c(x, y)(v(x) - v(y))$ 达到; Nash-Williams 判别法由此得出。见 Kemeny-Snell-Knapp 第 8 章及其参考文献。

8.7 马尔可夫随机场

设 S 为有限集 (“格点”), W 为有限集 (“状态”), 含一个特殊元素 0。 $\Omega = W^S$ 为构形空间。 S 上给定一个无向图结构 (邻居关系 $s \sim t$), $N(s) = \{t : t \sim s\}$ 。团是两两相邻的子集 (包括空集与单点集)。设 $\mathbb{P}$ 是 Ω 上处处为正的测度, $X = (X_s)_{s \in S}$ 为坐标。对 $A \subset S$ 与 $\omega \in \Omega$, 令 ω^A 为在 A 上与 ω 一致、在 $S \setminus A$ 上为 0 的构形。

定义 8.21

$\mathbb{P}$ 称为 (关于给定图的) 马尔可夫随机场, 若对每个 $s \in S$, 给定 $(X_t)_{t \neq s}$ 时 X_s 的条件分布只依赖于 $(X_t)_{t \in N(s)}$ 。 $\mathbb{P}$ 称为邻居 Gibbs 场, 若存在函数 $V_C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (C 取遍团, $V_C(\omega)$ 只依赖于 $\omega|_C$), 使

$$\mathbb{P}(\omega) = \exp \left(\sum_{C \text{ 团}} V_C(\omega) \right).$$

定理 8.22 (Hammersley-Clifford)

处处为正的测度 $\mathbb{P}$ 是马尔可夫随机场, 当且仅当它是邻居 Gibbs 场。

证明 $Gibbs \Rightarrow Markov$ 。 $\mathbb{P}(X_s = w \mid X_t = \omega_t, t \neq s) = \exp(\sum_{C \ni s} V_C(\omega^{(w)})) / \sum_{w'} \exp(\sum_{C \ni s} V_C(\omega^{(w')}))$, 其中 $\omega^{(w)}$ 是把 ω 在 s 处的值改为 w 的构形 (不含 s 的团的项约掉了)。含 s 的团包含于 $\{s\} \cup N(s)$ 。

$Markov \Rightarrow Gibbs$ 。对 $A \subset S$ 令

$$V_A(\omega) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} \log \mathbb{P}(\omega^B).$$

$V_A(\omega)$ 只依赖于 $\omega|_A$ 。由 Möbius 反演 ($\sum_{B \subset A \subset S} (-1)^{|A \setminus B|} = \mathbf{1}_{\{B=S\}}$), $\sum_{A \subset S} V_A(\omega) = \log \mathbb{P}(\omega^S) = \log \mathbb{P}(\omega)$ 。

只需证明：若 A 不是团，则 $V_A \equiv 0$ 。取 $s, t \in A$, $s \not\sim t$, 令 $A' = A \setminus \{s, t\}$, 则

$$V_A(\omega) = \sum_{B \subset A'} (-1)^{|A' \setminus B|} \left[\log \frac{\mathbb{P}(\omega^{B \cup \{s, t\}})}{\mathbb{P}(\omega^{B \cup \{t\}})} - \log \frac{\mathbb{P}(\omega^{B \cup \{s\}})}{\mathbb{P}(\omega^B)} \right].$$

$\mathbb{P}(\omega^{B \cup \{s, t\}})/\mathbb{P}(\omega^{B \cup \{t\}})$ 等于给定 s 以外的格点取值为 $\omega^{B \cup \{t\}}$ 时 $X_s = \omega_s$ 与 $X_s = 0$ 的条件概率之比；由马尔可夫性它只依赖于 $N(s)$ 上的取值，而 $t \notin N(s)$ ，所以把 t 处的值改为 0 不改变它，即它等于 $\mathbb{P}(\omega^{B \cup \{s\}})/\mathbb{P}(\omega^B)$ 。因此方括号为 0。

注 在 $S = \{1, \dots, n\}$ (最近邻图) 上，马尔可夫随机场恰好是 (非时齐的) 马氏链在时间上“双向”的刻画。在无限格点 $\mathbb{Z}^d$ 上，Gibbs 测度由局部条件分布 (DLR 方程) 定义，可能不唯一——这就是相变现象 (例如 $d \geq 2$ 时低温 Ising 模型)，见 Kemeny–Snell–Knapp 第 12 章。

例 8.7 (Gibbs 抽样) 马尔可夫随机场的局部条件分布容易计算 (只涉及邻居)，而 $\mathbb{P}$ 本身含有难以计算的归一化常数。下面的马氏链给出从 $\mathbb{P}$ 中近似抽样的方法：在构形空间 $\Omega = W^S$ 上，每一步均匀地随机选取一个格点 s ，并按条件分布 $\mathbb{P}(X_s = \cdot \mid X_t = \omega_t, t \neq s)$ 重新抽取 ω_s 。其转移矩阵为

$$Q(\omega, \omega') = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \mathbf{1}_{\{\omega' = \omega \text{ 于 } S \setminus \{s\}\}} \frac{\mathbb{P}(\omega')}{\sum_{w \in W} \mathbb{P}(\omega^{s, w})},$$

其中 $\omega^{s, w}$ 为把 ω 在 s 处的值改为 w 的构形。由于分母在 ω 与 ω' 互换时不变， $\mathbb{P}(\omega)Q(\omega, \omega') = \mathbb{P}(\omega')Q(\omega', \omega)$ ： $\mathbb{P}$ 是可逆测度。 $\mathbb{P}$ 处处为正，故任意两个构形可以通过逐点修改相互到达，链不可约； $Q(\omega, \omega) > 0$ ，链非周期。由定理 7.22，从任意初始构形出发，链在时刻 n 的分布在全变差意义下收敛到 $\mathbb{P}$ ；由遍历定理 7.19， $\frac{1}{n} \sum_{k < n} g(Y_k) \rightarrow \sum_{\omega} g(\omega) \mathbb{P}(\omega)$ a.s.

第三部分

布朗运动与随机分析

第9章 高斯过程与布朗运动

布朗运动是最重要的连续时间随机过程。它同时是高斯过程、马氏过程、鞅，并且是随机游走的标度极限。本章先发展高斯空间与高斯白噪声的语言，然后构造布朗运动，研究其路径性质，证明强马氏性与反射原理。

9.1 高斯空间与高斯过程

定义 9.1

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的闭线性子空间 $\mathfrak{H}$ 若只由中心化高斯变量组成，称为高斯空间。随机过程 $(X_t)_{t \in T}$ 称为（中心化）高斯过程，若对任意 $t_1, \dots, t_n \in T$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 是（中心化）高斯向量。其协方差函数为 $\Gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$ 。

引理 9.2

若 $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ 且 $X_n \rightarrow X$ 于 L^2 ，则 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = \lim \sigma_n^2$ 。因此若 (X_t) 是中心化高斯过程，则 $\{X_t\}$ 张成的闭线性子空间是高斯空间。

证明 $\sigma_n^2 = \mathbb{E}X_n^2 \rightarrow \mathbb{E}X^2$, $\mathbb{E}[e^{i\xi X_n}] = e^{-\sigma_n^2 \xi^2/2} \rightarrow \mathbb{E}[e^{i\xi X}]$ (L^2 收敛蕴含依分布收敛)。由定理 2.11 即得。 $\{X_t\}$ 的有限线性组合都是中心化高斯的，其 L^2 极限也是。

定理 9.3

设 $\mathfrak{H}$ 为高斯空间， $(\mathfrak{H}_i)_{i \in I}$ 为其闭子空间族。则 σ -代数族 $(\sigma(\mathfrak{H}_i))_{i \in I}$ 独立，当且仅当 $\mathfrak{H}_i$ 两两正交。若 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H}$ 为闭子空间， $X \in \mathfrak{H}$ ，则 $\mathbb{E}[X | \sigma(\mathfrak{K})] = p_{\mathfrak{K}}(X)$ （正交投影），且 $X - p_{\mathfrak{K}}(X)$ 与 $\sigma(\mathfrak{K})$ 独立。

证明 独立蕴含正交（推论 3.5）。反之，若 $\mathfrak{H}_i$ 两两正交，任取有限个 $i_1, \dots, i_n$ 与 $Y_1^k, \dots, Y_{p_k}^k \in \mathfrak{H}_{i_k}$ ，这些变量合起来是高斯向量（它们都在高斯空间 $\mathfrak{H}$ 中，任意线性组合都是高斯的），不同组之间协方差为 0，由命题 3.17(4)，各组独立。形如 $\{(Y_1, \dots, Y_p) \in B\}$ ($Y_j \in \mathfrak{H}_{i_j}$) 的事件构成生成 $\sigma(\mathfrak{H}_i)$ 的 π -系，由命题 3.2 得独立。第二个论断： $X - p_{\mathfrak{K}}X \in \mathfrak{H}$ 与 $\mathfrak{K}$ 正交，由第一部分它与 $\sigma(\mathfrak{K})$ 独立，故 $\mathbb{E}[X | \sigma(\mathfrak{K})] = p_{\mathfrak{K}}X + \mathbb{E}[X - p_{\mathfrak{K}}X] = p_{\mathfrak{K}}X$ 。

命题 9.4

设 $\Gamma: T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ 对称且半正定（对一切 $t_1, \dots, t_n$ 与 $c \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{j,k} c_j c_k \Gamma(t_j, t_k) \geq 0$ ）。则存在以 Γ 为协方差函数的中心化高斯过程。

证明 对有限 $J \subset T$ 令 $\mu_J = \mathcal{N}(0, (\Gamma(s, t))_{s, t \in J})$ （命题 3.17(2)）。高斯向量的子向量仍是高斯向量，协方差矩阵是相应子矩阵，故 (μ_J) 相容。由 Kolmogorov 扩张定理 3.11 得到 $\mathbb{R}^T$ 上的测度，坐标过程即为所求。

9.2 高斯白噪声

定义 9.5

设 $(E, \mathcal{E}, \mu)$ 为 σ -有限测度空间。以 μ 为强度的高斯白噪声是从 $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ 到某个高斯空间的线性等距映射 G 。对 $A \in \mathcal{E}$, $\mu(A) < \infty$ ，记 $G(A) = G(\mathbf{1}_A) \sim \mathcal{N}(0, \mu(A))$ 。

若 $A_1, \dots, A_n$ 两两不交，则 $\mathbf{1}_{A_k}$ 两两正交，从而 $G(A_1), \dots, G(A_n)$ 独立（定理 9.3）；若 $A = \bigcup_k A_k$ （可数不交并， $\mu(A) < \infty$ ），则 $G(A) = \sum_k G(A_k)$ 于 L^2 。

命题 9.6

若 $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ 可分, 则以 μ 为强度的高斯白噪声存在。



证明 取 $L^2(\mu)$ 的 (可数) 标准正交基 (e_n) 与独立同分布的 $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (推论 3.9)。令 $G(f) = \sum_n \langle f, e_n \rangle \xi_n$, 级数在 $L^2(\mathbb{P})$ 中收敛 ((ξ_n) 是 $L^2(\mathbb{P})$ 中的标准正交系), $\mathbb{E}[G(f)G(g)] = \sum_n \langle f, e_n \rangle \langle g, e_n \rangle = \langle f, g \rangle$ 。 G 的值域包含于 $\{\xi_n\}$ 张成的闭子空间, 后者是高斯空间 (引理 9.2)。

$L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), dt)$ 是可分的 (有理端点区间的示性函数的有理线性组合稠密)。

9.3 前布朗运动

定义 9.7

设 G 是 $\mathbb{R}_+$ 上以 Lebesgue 测度为强度的高斯白噪声。过程 $B_t = G([0, t])$, $t \geq 0$, 称为前布朗运动。

**命题 9.8**

对实过程 $(B_t)_{t \geq 0}$, 以下等价:

1. (B_t) 是前布朗运动 (即与上述定义中的过程有相同的有限维分布);
2. (B_t) 是中心化高斯过程, 协方差 $\mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t$;
3. $B_0 = 0$ a.s., 且对任意 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, 增量 $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 独立, $B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$ 。

此时 $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ 有密度

$$p_{t_1}(x_1)p_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\cdots p_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1}), \quad p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/(2t)}.$$



证明 (1) $\Rightarrow$ (2): $\mathbb{E}[G([0, s])G([0, t])] = \langle \mathbf{1}_{[0, s]}, \mathbf{1}_{[0, t]} \rangle = s \wedge t$ 。(2) $\Rightarrow$ (3): 增量构成高斯向量, 协方差可直接计算: $\mathbb{E}[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] = (t_k - t_{k-1})\mathbf{1}_{\{j=k\}}$, 用命题 3.17(4)。(3) $\Rightarrow$ (1): (3) 决定了 $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ 的分布 (它是独立增量的线性像), 而前布朗运动满足 (3)。密度由增量的独立性与线性变量替换得到。

命题 9.9 (不变性)

若 B 是前布朗运动, 则以下过程也是: $-B_t$; $\lambda^{-1}B_{\lambda^2 t}$ ($\lambda > 0$); $B_{s+t} - B_s$ ($s \geq 0$ 固定); $tB_{1/t}$ ($t > 0$), 0 ($t = 0$)。



证明 它们都是中心化高斯过程, 用命题 9.8(2) 验证协方差: 例如 $\mathbb{E}[sB_{1/s}tB_{1/t}] = st(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}) = s \wedge t$ 。

对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $G(f)$ 记为 $\int_0^\infty f(s)dB_s$ (Wiener 积分); 它是 $\mathcal{N}(0, \|f\|_2^2)$ 变量, 并且 $G(f)$ 只依赖于前布朗运动 B : 对阶梯函数 $f = \sum a_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}$, $G(f) = \sum a_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$, 再取 L^2 极限。

9.4 路径的连续性与布朗运动的构造

定义 9.10

过程 $\tilde{X}$ 称为 X 的修正, 若对每个 t , $\mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1$ 。 $\tilde{X}$ 与 X 称为不可区分, 若 $\mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t, \forall t) = 1$ 。



修正具有相同的有限维分布。两个路径右连续 (或左连续) 的过程若互为修正, 则不可区分 (在可数稠密集上一致, 再由连续性)。

定理 9.11 (Kolmogorov 连续性准则)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为有界区间, $(X_t)_{t \in I}$ 取值于完备度量空间 (E, d) 。若存在 $q, \varepsilon, C > 0$ 使

$$\mathbb{E}[d(X_s, X_t)^q] \leq C|t - s|^{1+\varepsilon} \quad \forall s, t \in I,$$

则 X 有一个修正 $\tilde{X}$, 其路径对每个 $\alpha \in (0, \varepsilon/q)$ 是局部 α -Hölder 连续的: a.s. 存在 $K_\alpha(\omega) < \infty$ 使 $d(\tilde{X}_s, \tilde{X}_t) \leq K_\alpha|t - s|^\alpha, s, t \in I$ 。

证明 不妨 $I = [0, 1]$ 。令 $D_n = \{k2^{-n} : 0 \leq k \leq 2^n\}$, $D = \bigcup_n D_n$ 。由 Markov 不等式,

$$\mathbb{P}(d(X_{(k-1)2^{-n}}, X_{k2^{-n}}) > 2^{-n\alpha}) \leq C2^{nq\alpha}2^{-n(1+\varepsilon)},$$

对 k 求和得 $\mathbb{P}(\max_k d(X_{(k-1)2^{-n}}, X_{k2^{-n}}) > 2^{-n\alpha}) \leq C2^{-n(\varepsilon - q\alpha)}$, 关于 n 可和。由 Borel-Cantelli, a.s. 存在 $n_0(\omega)$ 使 $n \geq n_0$ 时 $\max_k d(X_{(k-1)2^{-n}}, X_{k2^{-n}}) \leq 2^{-n\alpha}$ 。于是 $K'(\omega) := \sup_n 2^{n\alpha} \max_k d(X_{(k-1)2^{-n}}, X_{k2^{-n}}) < \infty$ a.s.

二进制点上的 Hölder 估计。设 $s < t$ 属于 D , $2^{-p-1} < t - s \leq 2^{-p}$ 。对 $k \geq p+1$ 令 $s_k = \lceil 2^k s \rceil 2^{-k}$, $t_k = \lfloor 2^k t \rfloor 2^{-k}$ 。则 $s_k \downarrow s$, $t_k \uparrow t$, 且当 k 充分大时 $s_k = s$, $t_k = t$; $s_k - s_{k+1}$ 与 $t_{k+1} - t_k$ 属于 $\{0, 2^{-k-1}\}$; $t_{p+1} - s_{p+1}$ 是 2^{-p-1} 的整数倍, 且属于 $(t - s - 2^{-p}, t - s] \subset (-2^{-p-1}, 2^{-p}]$, 故 s_{p+1} 与 t_{p+1} 之间至多相隔 D_{p+1} 的两步。由三角不等式,

$$d(X_s, X_t) \leq \sum_{k \geq p+1} d(X_{s_{k+1}}, X_{s_k}) + d(X_{s_{p+1}}, X_{t_{p+1}}) + \sum_{k \geq p+1} d(X_{t_k}, X_{t_{k+1}}) \leq 2K' \sum_{k \geq p+1} 2^{-k\alpha} \leq c_\alpha K'|t - s|^\alpha.$$

因此在 $\{K' < \infty\}$ 上, $t \mapsto X_t$ 在 D 上是 α -Hölder 的, 从而一致连续, 可以唯一地延拓为 $[0, 1]$ 上的连续函数 $\tilde{X}_t = \lim_{s \rightarrow t, s \in D} X_s$ (E 完备); 在 $\{K' = \infty\}$ 上令 $\tilde{X}_t = x_0$ 为固定点。 $\tilde{X}$ 满足同样的 Hölder 估计。

修正。对固定的 t , 取 $s_n \in D$, $s_n \rightarrow t$ 。由假设 $X_{s_n} \rightarrow X_t$ 依概率, 而 $X_{s_n} \rightarrow \tilde{X}_t$ a.s., 故 $\tilde{X}_t = X_t$ a.s.。最后, 对每个 α 取可数个 $\alpha_k \uparrow \varepsilon/q$ 即得“对一切 α ”。

定义 9.12

实过程 $(B_t)_{t \geq 0}$ 称为布朗运动 (从 0 出发), 若它是前布朗运动且其所有路径 $t \mapsto B_t(\omega)$ 连续。

定理 9.13

布朗运动存在。并且布朗运动的路径对每个 $\alpha < \frac{1}{2}$ 是局部 α -Hölder 连续的。

证明 设 B 为前布朗运动。 $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, 故 $\mathbb{E}|B_t - B_s|^q = c_q|t - s|^{q/2}$ 。对 $q > 2$ 应用定理 9.11 ($\varepsilon = q/2 - 1$), 在每个 $[0, N]$ 上得到连续修正, 它们在交集上不可区分, 粘合 (并在一个零测集上令路径为 0) 得到 $\mathbb{R}_+$ 上的连续修正, 它的路径对一切 $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ 局部 Hölder, 令 $q \rightarrow \infty$ 。修正有相同的有限维分布。

注 [Lévy-Ciesielski 构造] 另一种常见的构造直接给出连续路径。令 $h_0 = \mathbf{1}_{[0,1]}$, $h_{n,k} = 2^{n/2}(\mathbf{1}_{[(k-1)2^{-n}, (k-\frac{1}{2})2^{-n})} - \mathbf{1}_{[(k-\frac{1}{2})2^{-n}, k2^{-n})})$ (Haar 函数, 构成 $L^2[0, 1]$ 的标准正交基), $s(t) = \int_0^t h(u)du$ (Schauder 函数)。对独立标准正态的 $\xi_0, \xi_{n,k}$, 令 $B_t = \xi_0 s_0(t) + \sum_{n \geq 0} \sum_{k \leq 2^n} \xi_{n,k} s_{n,k}(t)$ 。由于同一层的 $s_{n,k}$ 支撑不交且 $\|s_{n,k}\|_\infty = 2^{-n/2-1}$, 第 n 层的和的一致范数不超过 $2^{-n/2-1} \max_k |\xi_{n,k}|$; 而由引理 9.22 与 Borel-Cantelli, a.s. 最终 $\max_k |\xi_{n,k}| \leq \sqrt{4n}$ 。故级数 a.s. 一致收敛, B 连续。它正是 $[0, 1]$ 上以 Haar 基构造的白噪声 (命题 9.6) 所给的前布朗运动 $G([0, t]) = \sum \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, h \rangle \xi$ 。

令 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ 配度量 $d(w, w') = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} (\sup_{t \leq n} |w(t) - w'(t)| \wedge 1)$ (局部一致收敛拓扑), 它是 Polish 空间 (多项式在有理系数下的逼近给出可数稠密集; 完备性来自一致极限的连续性)。

引理 9.14

$C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ 的 Borel σ -代数等于由坐标映射 $w \mapsto w(t)$ ($t \geq 0$) 生成的 σ -代数 $\mathcal{C}$ 。

证明 坐标映射连续, 故 $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ 。反之, 对固定 w_0 , $w \mapsto d(w, w_0)$ 是 $\mathcal{C}$ -可测的, 因为 $\sup_{t \leq n} |w(t) - w_0(t)| = \sup_{t \in [0, n] \cap \mathbb{Q}} |w(t) - w_0(t)|$ 。于是开球属于 $\mathcal{C}$, 而可分度量空间中每个开集是可数个开球之并。

若 B 是布朗运动, 则 $\omega \mapsto (B_t(\omega))_{t \geq 0}$ 是取值于 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 的随机变量 (引理 9.14 与引理 1.2), 其分布 W

称为 *Wiener* 测度。由于 $\mathcal{C}$ 由柱集 (π -系) 生成, W 由有限维分布唯一决定, 即不依赖于 B 的具体构造。在 $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}, W)$ 上, 坐标过程 $X_t(w) = w(t)$ 是布朗运动, 称为典范布朗运动。

定义 9.15

d 维布朗运动是 $B = (B^1, \dots, B^d)$, 其中 $B^1, \dots, B^d$ 为独立的布朗运动。对 $x \in \mathbb{R}^d$, $x + B$ 称为从 x 出发的布朗运动, 其在 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ 上的分布记为 $\mathbb{P}_x$ (或 W_x)。



d 维布朗运动的增量独立, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$, 密度为 $p_{t-s}(y) = (2\pi(t-s))^{-d/2} e^{-|y|^2/(2(t-s))}$ 。由于 $\mathcal{N}(0, tI_d)$ 在正交变换下不变, 对 $d \times d$ 正交矩阵 O , OB 仍是 d 维布朗运动。

9.5 路径性质

令 $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$, $\mathcal{F}_{0+}^B = \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t^B$ 。

定理 9.16 (Blumenthal 0-1 律)

对 $A \in \mathcal{F}_{0+}^B$, $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ 。



证明 设 $0 < t_1 < \dots < t_k$, g 有界连续, $A \in \mathcal{F}_{0+}^B$ 。对 $0 < \varepsilon < t_1$, $B_{t_j} - B_\varepsilon$ ($j \leq k$) 与 $\mathcal{F}_\varepsilon^B \supset \mathcal{F}_{0+}^B$ 独立 (独立增量与分组引理), 故 $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)] = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[g(\dots)]$ 。令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 由路径连续性与控制收敛, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})] = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})]$ 。因此 $\mathcal{F}_{0+}^B$ 与 $\sigma(B_t, t > 0)$ 独立 (命题 3.2 与命题 2.4)。而 $B_0 = \lim_{t \downarrow 0} B_t$, 故 $\sigma(B_t, t > 0) = \sigma(B_t, t \geq 0) \supset \mathcal{F}_{0+}^B$, A 与自身独立。

推论 9.17

a.s. 对一切 $\varepsilon > 0$, $\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0$ 且 $\inf_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s < 0$ 。对 $a \in \mathbb{R}$, $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\} < \infty$ a.s.。
a.s. $\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty$ 。



证明 令 $\varepsilon_k \downarrow 0$ 。事件 $A = \bigcap_k \{\sup_{s \leq \varepsilon_k} B_s > 0\}$ 属于 $\mathcal{F}_{0+}^B$ (上确界可沿有理点取), 且 $\mathbb{P}(A) = \lim \mathbb{P}(\sup_{s \leq \varepsilon_k} B_s > 0) \geq \limsup \mathbb{P}(B_{\varepsilon_k} > 0) = \frac{1}{2}$, 故 $\mathbb{P}(A) = 1$; 对 $-B$ 同理。由此 $\mathbb{P}(\sup_{s \leq 1} B_s > \delta) \uparrow 1$ ($\delta \downarrow 0$)。由标度不变性, $\mathbb{P}(\sup_{s \leq 1} B_s > \delta) = \mathbb{P}(\sup_{s \leq \delta^{-2}} B_s > 1)$, 故 $\mathbb{P}(\sup_{s \geq 0} B_s > 1) = 1$, 再由标度 $\mathbb{P}(\sup_s B_s > M) = 1$ 对一切 M 。对 $-B$ 同理。路径连续, 由介值定理 $T_a < \infty$; $\limsup B_t = +\infty$ 由 $\sup B = +\infty$ 与有界区间上路径有界得到。

命题 9.18 (二次变差)

设 $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ 为 $[0, t]$ 的分割序列, 网眼 $\delta_n = \max_i (t_i^n - t_{i-1}^n) \rightarrow 0$ 。则 $\sum_i (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \rightarrow t$ 于 L^2 。因此 a.s. 布朗运动的路径在任何区间上都不是有界变差的, 在任何区间上都不单调。



证明 各项 $(\Delta_i B)^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n)$ 独立、中心化, 方差为 $2(t_i^n - t_{i-1}^n)^2$ 。故 $\mathbb{E}[(\sum_i (\Delta_i B)^2 - t)^2] = 2 \sum_i (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \leq 2t\delta_n \rightarrow 0$ 。若路径在 $[a, b]$ 上有界变差 V , 则 $\sum (\Delta_i B)^2 \leq V \max_i |\Delta_i B| \rightarrow 0$ (一致连续性), 与沿某子列 a.s. 收敛到 $b - a > 0$ 矛盾 (对有理区间 $[a, b]$ 及二进制分割取子列, 取可数并)。单调函数是有界变差的。

注 沿二进制分割 $t_i = it2^{-n}$, 收敛还是 a.s. 的: 记 $Q_n = \sum_{i \leq 2^n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$, 上面的方差为 $2t^2 2^{-n}$, 由 Chebyshev 不等式与 Borel-Cantelli 引理, $\sum_n \mathbb{P}(|Q_n - t| > \varepsilon) \leq \sum_n 2t^2 2^{-n} / \varepsilon^2 < \infty$ 。

9.6 强马氏性与反射原理

本节暂时使用如下定义 (第 10 章将系统地讨论): 取值于 $[0, \infty]$ 的随机变量 T 称为关于滤子 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时, 若对一切 $t \geq 0$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$; $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}$, 其中 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_t \mathcal{F}_t)$ 。若 T 是停时, 则 $\{T < t\} = \bigcup_n \{T \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$, 且 T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的。

例 9.1 $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ 是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -停时: 由路径连续, $\{T_a \leq t\} = \{\inf_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} |B_s - a| = 0\}$ 。

定理 9.19 (强马氏性)

设 B 为 d 维布朗运动, T 为 $(\mathcal{F}_t^B)$ -停时, $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$ 。则在 $\mathbb{P}(\cdot | T < \infty)$ 下, 过程 $B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$ 是布朗运动, 且与 $\mathcal{F}_T^B$ 独立。



证明 先看确定性时刻 s : 由独立增量, $B^{(s)}$ 是布朗运动且与 $\mathcal{F}_s^B$ 独立 (π - λ 论证)。令 $T_n = ([2^n T] + 1)2^{-n}$ ($T = \infty$ 时 $T_n = \infty$), 则 $T_n \downarrow T, T_n > T$ 。对 $A \in \mathcal{F}_T^B, A \cap \{T_n = k2^{-n}\} = A \cap \{(k-1)2^{-n} \leq T < k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}^B$ 。设 $F: (\mathbb{R}^d)^m \rightarrow \mathbb{R}$ 有界连续, $0 \leq s_1 < \dots < s_m$ 。则

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} F(B_{s_1}^{(T_n)}, \dots, B_{s_m}^{(T_n)})] = \sum_k \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A \cap \{T_n = k2^{-n}\}} F(B_{s_1}^{(k2^{-n})}, \dots)] = \mathbb{P}(A \cap \{T < \infty\}) \mathbb{E}[F(B_{s_1}, \dots, B_{s_m})].$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由路径连续性 $B_s^{(T_n)} \rightarrow B_s^{(T)}$, 由控制收敛, 等式对 T 成立。取 $A = \Omega$ 知 $B^{(T)}$ 在 $\mathbb{P}(\cdot | T < \infty)$ 下的有限维分布与布朗运动相同 (且路径连续); 一般的 A 给出独立性 (命题 2.4、3.2)。

推论 9.20 (马氏性的函数形式)

设 B 为从 x 出发的典范布朗运动 (在 $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \mathbb{P}_x)$ 上), θ_t 为平移 $\theta_t w = w(t + \cdot)$, T 为 $(\mathcal{F}_t^B)$ -停时, F 为 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ 上的非负可测函数。则

$$\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} F \circ \theta_T | \mathcal{F}_T^B] = \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \mathbb{E}_{B_T}[F].$$



证明 $F \circ \theta_T = F(B_T + B^{(T)})$, B_T 是 $\mathcal{F}_T^B$ -可测的 (见第 10 章命题 10.6; 对连续过程可直接由 $B_T = \lim B_{T_n}$ 验证), $B^{(T)}$ 与 $\mathcal{F}_T^B$ 独立且为布朗运动, 由冻结引理 5.5。

定理 9.21 (反射原理)

设 B 为一维布朗运动, $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ 。则对 $t > 0, a \geq 0, b \leq a$,

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b).$$

因此 $S_t \stackrel{(d)}{=} |B_t|$, (S_t, B_t) 有密度 $\frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp(-\frac{(2a-b)^2}{2t}) \mathbf{1}_{\{a > 0, b < a\}}$; 且对 $a > 0, T_a$ 有密度

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/(2t)} \mathbf{1}_{\{t > 0\}}.$$



证明 $\{S_t \geq a\} = \{T_a \leq t\}$ 。令 $B' = B^{(T_a)}$, 由定理 9.19, B' 与 T_a 独立, 故 $(T_a, B') \stackrel{(d)}{=} (T_a, -B')$ 。由于 $(s, w) \mapsto w(s)$ 在 $\mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上连续,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t \leq b) &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B'_{t-T_a} \leq b-a) = \mathbb{P}(T_a \leq t, -B'_{t-T_a} \leq b-a) \\ &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t \geq 2a-b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a-b), \end{aligned}$$

最后一步因为 $2a-b \geq a$ 且 $B_t \geq a$ 蕴含 $T_a \leq t$ 。取 $b = a$: $\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t < a) + \mathbb{P}(B_t \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$ ($\mathbb{P}(B_t = a) = 0$)。对 a, b 求导得联合密度。 $\mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a) = \mathbb{P}(|B_1| \geq a/\sqrt{t})$, 对 t 求导得密度。

注 [随机游走的标度极限] 若 S_n 为中心化、方差为 1 的随机游走, 由中心极限定理 (应用于独立增量),

$$(n^{-1/2} S_{[nt_1]}, \dots, n^{-1/2} S_{[nt_k]}) \xrightarrow{(d)} (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}).$$

Donsker 不变原理进一步断言整个折线过程依分布收敛到布朗运动 (定理 10.18); 这解释了为什么布朗运动是“普适”的。

9.7 更多的路径性质

引理 9.22 (高斯尾估计)

设 $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. 则对 $x > 0$, $\frac{x}{1+x^2}\varphi(x) \leq \mathbb{P}(N > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$.



证明 上界: $\mathbb{P}(N > x) \leq \int_x^\infty \frac{y}{x} \varphi(y) dy = \varphi(x)/x$. 下界: $g(x) = \frac{x}{1+x^2}\varphi(x)$ 满足 $g'(x) = -\varphi(x)(1 - \frac{2}{(1+x^2)^2}) \geq -\varphi(x)$, $g(\infty) = 0$, 故 $g(x) \leq \int_x^\infty \varphi$.

定理 9.23 (重对数律)

设 B 为一维布朗运动, $h(t) = \sqrt{2t \log \log t}$ ($t > e$). 则 a.s.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{h(t)} = -1.$$

由时间反演 (命题 9.9), a.s. $\limsup_{t \downarrow 0} B_t/\sqrt{2t \log \log(1/t)} = 1$.



证明 上界. 固定 $\varepsilon > 0$, 取 $q > 1$ 使 $(1+\varepsilon)^2/q > 1$. 令 $t_n = q^n$. 由反射原理与引理 9.22, 对 $x \geq \sqrt{t}$, $\mathbb{P}(S_t > x) = 2\mathbb{P}(B_t > x) \leq e^{-x^2/(2t)}$. 取 $x = (1+\varepsilon)h(t_{n-1})$, $t = t_n$:

$$\mathbb{P}(S_{t_n} > (1+\varepsilon)h(t_{n-1})) \leq \exp\left(-\frac{(1+\varepsilon)^2}{q} \log \log t_{n-1}\right) = ((n-1) \log q)^{-(1+\varepsilon)^2/q},$$

关于 n 可和. 由 Borel–Cantelli, a.s. 对充分大的 n , $S_{t_n} \leq (1+\varepsilon)h(t_{n-1})$; 于是对 $t \in [t_{n-1}, t_n]$, $B_t \leq S_{t_n} \leq (1+\varepsilon)h(t)$ (h 递增). 故 $\limsup B_t/h(t) \leq 1+\varepsilon$.

下界. 固定 $\varepsilon \in (0, 1)$, 取 q 很大使 $(1-\varepsilon)^2 \frac{q}{q-1} < 1$ 且 $2/\sqrt{q} < \varepsilon$. 增量 $\Delta_n = B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_n - t_{n-1})$ 独立. 令 $y_n = (1-\varepsilon)h(t_n)/\sqrt{t_n - t_{n-1}}$, 则 $\frac{y_n^2}{2} = (1-\varepsilon)^2 \frac{q}{q-1} \log(n \log q)$. 由引理 9.22, $\mathbb{P}(\Delta_n > (1-\varepsilon)h(t_n)) \geq \frac{c}{y_n} e^{-y_n^2/2} \geq \frac{c'}{\sqrt{\log n}} n^{-(1-\varepsilon)^2 q/(q-1)}$, 不可和. 由 Borel–Cantelli 第二引理, a.s. 无穷多次 $\Delta_n > (1-\varepsilon)h(t_n)$. 由上界 (应用于 $-B$), a.s. 最终 $B_{t_{n-1}} \geq -2h(t_{n-1}) \geq -\frac{2+o(1)}{\sqrt{q}}h(t_n)$. 故无穷多次 $B_{t_n} \geq (1-\varepsilon - \frac{2}{\sqrt{q}} - o(1))h(t_n)$, $\limsup B_t/h(t) \geq 1-2\varepsilon$. $\liminf$ 由对称性.

定理 9.24 (Paley–Wiener–Zygmund)

a.s. 布朗运动的路径处处不可微.



证明 只需考虑 $[0, 1]$. 若路径在某个 $s \in [0, 1]$ 处可微, 则存在整数 M 与 n_0 , 使对 $|t-s| \leq 4/n$ ($n \geq n_0$), $|B_t - B_s| \leq M|t-s|$. 令 $k = \lfloor sn \rfloor + 1$, 则对 $j = k, k+1, k+2$, $|B_{(j+1)/n} - B_{j/n}| \leq |B_{(j+1)/n} - B_s| + |B_s - B_{j/n}| \leq \frac{8M}{n}$. 因此路径属于

$$A_{M,n} = \bigcup_{k \leq n} \bigcap_{j=k}^{k+2} \left\{ |B_{(j+1)/n} - B_{j/n}| \leq \frac{8M}{n} \right\}$$

对一切充分大的 n . 由独立增量与 $\mathbb{P}(|B_{1/n}| \leq 8M/n) = \mathbb{P}(|N| \leq 8M/\sqrt{n}) \leq 8M/\sqrt{n}$, $\mathbb{P}(A_{M,n}) \leq (n+1)(8M/\sqrt{n})^3 \rightarrow 0$. 故 $\mathbb{P}(\liminf_n A_{M,n}) \leq \liminf \mathbb{P}(A_{M,n}) = 0$, 对可数个 M 取并即得 (在 $s=1$ 处的左可微性类似处理).

定理 9.25 (Lévy 连续模)

令 $\phi(h) = \sqrt{2h \log(1/h)}$. 则 a.s.

$$\limsup_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\phi(h)} = 1.$$



证明 下界. 固定 $\varepsilon \in (0, 1)$, $x_n = (1-\varepsilon)\sqrt{2n \log 2}$. 由独立增量与引理 9.22,

$$\mathbb{P}\left(\max_{k < 2^n} |B_{(k+1)2^{-n}} - B_{k2^{-n}}| \leq (1-\varepsilon)\phi(2^{-n})\right) = (1 - \mathbb{P}(|N| > x_n))^{2^n} \leq \exp(-2^n \mathbb{P}(N > x_n)),$$

而 $2^n \mathbb{P}(N > x_n) \geq \frac{c}{x_n} 2^{n(1-(1-\varepsilon)^2)} \geq 2^{n\varepsilon/2}$ (n 大), 右边可和。由 Borel–Cantelli, a.s. 对充分大的 n , 存在 k 使 $|B_{(k+1)2^{-n}} - B_{k2^{-n}}| > (1-\varepsilon)\phi(2^{-n})$ 。

上界。固定 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ 使 $(1-\delta)(1+\varepsilon)^2 > 1+2\delta$ 。考虑事件 E_n : 存在 $0 \leq j < k \leq 2^n$, $m = k - j \leq 2^{n\delta+1}$, 使 $|B_{k2^{-n}} - B_{j2^{-n}}| > (1+\varepsilon)\phi(m2^{-n})$ 。由引理 9.22, $\mathbb{P}(|N| > (1+\varepsilon)\sqrt{2\log(2^n/m)}) \leq (m2^{-n})^{(1+\varepsilon)^2} \leq 2^{-n(1-\delta)(1+\varepsilon)^2}$ (n 大, $m \leq 2^{n\delta+1}$), 故 $\mathbb{P}(E_n) \leq 2^n \cdot 2^{n\delta+1} \cdot 2^{-n(1-\delta)(1+\varepsilon)^2}$, 可和。于是 a.s. 存在 n_0 , $n \geq n_0$ 时 E_n 不发生。

设 $0 \leq t < t+h \leq 1$, h 很小, 取 n 使 $2^{-(n+1)(1-\delta)} < h \leq 2^{-n(1-\delta)}$, 并设 $n \geq n_0$ 。令 $j = \lceil 2^n t \rceil, k = \lfloor 2^n(t+h) \rfloor$ (若 $k \leq j$, 下面的论证更简单)。则 $m = k - j \leq h2^n \leq 2^{n\delta}$, 由 E_n 不发生, $|B_{k2^{-n}} - B_{j2^{-n}}| \leq (1+\varepsilon)\phi(h)$ (ϕ 在 $(0, e^{-1})$ 上递增)。 t 与 $j2^{-n}$ 的差可以写成各层 D_i ($i > n$) 中至多一步之和 (如定理 9.11 的证明), 每一步的增量 $\leq (1+\varepsilon)\phi(2^{-i})$ (E_i 不发生, $m = 1$), 故 $|B_t - B_{j2^{-n}}| \leq 2 \sum_{i>n} \phi(2^{-i}) \leq C\phi(2^{-n})$; 对 $t+h$ 同理。由于 $\phi(2^{-n})/\phi(h) \leq C'2^{-n\delta/2} \sqrt{n/(n(1-\delta))} \rightarrow 0$, 对充分小的 h , $|B_{t+h} - B_t| \leq (1+2\varepsilon)\phi(h)$ 。

命题 9.26 (最后零点的反正弦律)

令 $g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\}$ 。则 g_t/t 服从反正弦分布: $\mathbb{P}(g_t \leq s) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{s/t}$, $0 \leq s \leq t$ 。

证明 对 $x \neq 0$, 由反射原理, $\mathbb{P}_x(T_0 > u) = \mathbb{P}_0(S_u < |x|) = \mathbb{P}(|B'_u| < |x|)$, B' 为独立的布朗运动。由马氏性 (在时刻 s),

$$\mathbb{P}(g_t \leq s) = \mathbb{P}(B \text{ 在 } (s, t] \text{ 中无零点}) = \mathbb{E}[\mathbb{P}_{B_s}(T_0 > t-s)] = \mathbb{P}(\sqrt{t-s}|N_1| < \sqrt{s}|N_2|),$$

N_1, N_2 独立标准正态。 N_1/N_2 服从 Cauchy 分布 ((N_1, N_2) 的旋转不变性: 辐角均匀分布), 故

$$\mathbb{P}(g_t \leq s) = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{s}{t-s}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}.$$

命题 9.27 (布朗桥)

令 $b_t = B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$ 。则 (b_t) 是中心化高斯过程, 协方差 $s \wedge t - st$, 路径连续, $b_0 = b_1 = 0$, 且 $(b_t)_{t \leq 1}$ 与 B_1 独立。因此对 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上的非负可测 F 与 $x \in \mathbb{R}$, 令 $\Phi(x) = \mathbb{E}[F((b_t + tx)_{t \leq 1})]$, 则 $\mathbb{E}[F(B) | B_1] = \Phi(B_1)$: b 是“以 $B_1 = 0$ 为条件的布朗运动”。

证明 $(b_{t_1}, \dots, b_{t_n}, B_1)$ 是 $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}, B_1)$ 的线性像, 是高斯向量; $\text{Cov}(b_t, B_1) = t - t = 0$, $\text{Cov}(b_s, b_t) = s \wedge t - st - st + st$ 。由定理 9.3, $\sigma(b_t, t \leq 1)$ 与 B_1 独立。 $B = b + \cdot B_1$, 由冻结引理 5.5 即得。

第 10 章 滤子与连续时间鞅

本章把第 6 章的离散鞅理论推广到连续时间。核心思想是：对路径右连续的过程，几乎所有结论都可以通过可数稠密集（二进制有理数）上的离散鞅与极限论证得到。我们还证明鞅的正则化定理，并给出布朗运动的若干应用。

10.1 滤子与过程

定义 10.1

概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的滤子是 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数的递增族 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 。记 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_t \mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ 。若 $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ 对一切 t ，称滤子右连续。若 $\mathcal{F}_0$ 包含 $\mathcal{F}$ 的所有 $\mathbb{P}$ -零集，称滤子完备。右连续且完备的滤子称为满足通常条件。

给定滤子 $(\mathcal{F}_t)$ ，令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{F}$ 的零集全体， $\mathcal{F}'_t = \sigma(\mathcal{F}_{t+}, \mathcal{N})$ ，则 $(\mathcal{F}'_t)$ 满足通常条件 $(\bigcap_{s>t} \sigma(\mathcal{F}_{s+}, \mathcal{N}) = \sigma(\mathcal{F}_{t+}, \mathcal{N})$ ：若 A 属于左边，对每个 n 取 $A_n \in \mathcal{F}_{(t+1/n)+}$ 使 $A \Delta A_n$ 是零集，则 $\limsup A_n \in \mathcal{F}_{t+}$ 且与 A 只差零集。它称为 $(\mathcal{F}_t)$ 的通常增广。

定义 10.2

过程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ （取值于可测空间 E ）称为适应的，若每个 X_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的；称为循序可测的，若对每个 t ，映射 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ 在 $[0, t] \times \Omega$ 上关于 $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ 可测。

命题 10.3

取值于度量空间的适应过程，若路径都右连续（或都左连续），则它是循序可测的。

证明 固定 t ，令 $X_s^n = X_{\min(\lceil 2^n s / t \rceil t 2^{-n}, t)}$ （右连续情形）， $s \in [0, t]$ 。 X^n 在每个区间 $((k-1)t2^{-n}, kt2^{-n}]$ 上取常值 $X_{kt2^{-n}}$ ，且 $X_0^n = X_0$ ，故 $(s, \omega) \mapsto X_s^n(\omega)$ 是 $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -可测的；由右连续性 $X_s^n \rightarrow X_s$ ，可测函数的逐点极限可测（对度量空间值函数： $\{X \in F\} = \bigcap_k \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \{d(X^n, F) < 1/k\}$ ， F 闭）。左连续情形用 $\lfloor \cdot \rfloor$ 。

10.2 停时

定义 10.4

取值于 $[0, \infty]$ 的随机变量 T 称为停时，若 $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ 对一切 $t \geq 0$ 成立。 $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}$ 。

命题 10.5

1. 若滤子右连续，则 T 是停时当且仅当 $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ 对一切 $t > 0$ 成立。
2. 若 S, T 是停时，则 $S \wedge T, S \vee T$ 是停时；若 $S \leq T$ ，则 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ ； T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的； $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ 。
3. 若 (T_n) 是停时序列，则 $\sup_n T_n$ 是停时；若滤子右连续，则 $\inf_n T_n$ 是停时，并且当 $T_n \downarrow T$ 时 $\mathcal{F}_T = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$ 。
4. 若 T 是停时，则 $T_n = (\lfloor 2^n T \rfloor + 1)2^{-n}$ ($T = \infty$ 时 $T_n = \infty$) 是取值于 $2^{-n}\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的停时， $T_n \downarrow T$ ， $T_n > T$ 于 $\{T < \infty\}$ ，且 $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T_n}$ 。

证明 (1) 若 $\{T < s\} \in \mathcal{F}_s$ 对一切 s ，则 $\{T \leq t\} = \bigcap_n \{T < t + 1/n\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ ；反之 $\{T < t\} = \bigcup_n \{T \leq t - 1/n\}$ 。(2) $\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\}$ 等。若 $A \in \mathcal{F}_S$, $S \leq T$ ，则 $A \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\}$ 。

$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$ 。对 $\{S \leq T\}$: $\{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\}$, 而 $S \wedge t, T \wedge t$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的 (因为 $\{S \wedge t \leq u\}$ 对 $u < t$ 等于 $\{S \leq u\} \in \mathcal{F}_u$, 对 $u \geq t$ 是 Ω) ; 类似地处理 $\{S \leq T\} \cap \{S \leq t\}$ 。(3) $\{\sup T_n \leq t\} = \bigcap \{T_n \leq t\}$; $\{\inf T_n < t\} = \bigcup \{T_n < t\}$, 用 (1)。(若 $T_n \downarrow T$, $\mathcal{F}_T \subset \bigcap \mathcal{F}_{T_n}$ 由 (2); 反之若 $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$, 则 $A \cap \{T < t\} = \bigcup_n (A \cap \{T_n < t\}) \in \mathcal{F}_t$, 由 (1) 的论证 (应用于 $A \cap \{\cdot\}$) $A \in \mathcal{F}_T$ 。 (4) $\{T_n \leq k2^{-n}\} = \{T < k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$; 对 $A \in \mathcal{F}_T$, $A \cap \{T_n \leq k2^{-n}\} = A \cap \{T < k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$ 。

命题 10.6

若 X 循序可测, T 是停时, 则 $X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}$ 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的, 停止过程 $X_t^T = X_{T \wedge t}$ 循序可测。

证明 映射 $\omega \mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega)$ 从 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 到 $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ 可测, 与 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ 复合得 $X_{T \wedge t}$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。于是 $\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{X_{T \wedge t} \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ 。第二个论断类似: $(s, \omega) \mapsto (T(\omega) \wedge s, \omega)$ 在 $[0, t] \times \Omega$ 上可测。

命题 10.7 (首中时)

设 X 是取值于度量空间 E 的适应过程。

1. 若 X 路径连续, $F \subset E$ 闭, 则 $T_F = \inf\{t \geq 0 : X_t \in F\}$ 是停时。
2. 若 X 路径右连续, 滤子右连续, $U \subset E$ 开, 则 $T_U = \inf\{t \geq 0 : X_t \in U\}$ 是停时。

证明 (1) $\{T_F \leq t\} = \{\inf_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_s, F) = 0\}$ (连续路径在紧区间上的像是紧集, $d(\cdot, F)$ 连续)。(2) 由右连续性, $\{T_U < t\} = \bigcup_{s \in [0, t) \cap \mathbb{Q}} \{X_s \in U\} \in \mathcal{F}_t$, 用命题 10.5(1)。

10.3 连续时间鞅

定义 10.8

适应可积实过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 称为鞅 (上鞅、下鞅), 若对 $s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ ($\leq, \geq$)。设 B 是适应于 $(\mathcal{F}_t)$ 的 d 维布朗运动; 若对一切 $s \leq t$, $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立, 称 B 为 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。

布朗运动关于其自然滤子是 $(\mathcal{F}_t^B)$ -布朗运动; 由于独立性在添加零集后保持, 它关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 的完备化也是。由定理 9.16 的证明 (把时刻 0 换为 s), $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_{s+}^B$ 独立, 因此布朗运动关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 的通常增广也是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。以后我们总可以假设布朗运动的滤子满足通常条件。

注 定理 9.19 及推论 9.20 的证明只用到“ $B_{s+} - B_s$ 是布朗运动且与 $\mathcal{F}_s$ 独立”以及停时的二进制逼近, 因此它们对任何 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动与任何 $(\mathcal{F}_t)$ -停时 T 同样成立 (把 $\mathcal{F}^B$ 换成 $\mathcal{F}$)。以后我们在这种一般形式下使用强马氏性。

例 10.1 若 B 是一维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, 则 $B_t, B_t^2 - t, \exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$ ($\theta \in \mathbb{R}$) 都是鞅。例如 $\mathbb{E}[e^{\theta B_t} | \mathcal{F}_s] = e^{\theta B_s} \mathbb{E}[e^{\theta(B_t - B_s)}] = e^{\theta B_s + \theta^2(t-s)/2}$ 。

命题 10.9 (Doob 不等式)

设 X 是路径右连续的下鞅, $t > 0$ 。

1. 若 X 是鞅或非负下鞅, $\lambda > 0$, 则 $\lambda \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} |X_s| \geq \lambda) \leq \mathbb{E}|X_t|$ 。
2. 若 X 是鞅或非负下鞅, $p > 1$, 则 $\mathbb{E}[\sup_{s \leq t} |X_s|^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}|X_t|^p$ 。

证明 令 $D_n = \{kt2^{-n} : 0 \leq k \leq 2^n\}$ 。由右连续性, $\sup_{s \leq t} |X_s| = \lim_n \uparrow \max_{s \in D_n} |X_s|$ 。对离散鞅 $(X_s)_{s \in D_n}$ 用定理 6.8 (以 $\lambda' < \lambda$ 代替 λ , 处理严格与非严格不等式) 与定理 6.12, 再用单调收敛。

引理 10.10 (反向上鞅)

设 $(\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ 如定义于第 6 章反向鞅处, $(X_n)_{n \leq 0}$ 适应可积, $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n] \leq X_n$, 且 $\sup_{n \leq 0} \mathbb{E}[X_n] < \infty$ 。则 (X_n) 一致可积, 并且当 $n \rightarrow -\infty$ 时 a.s. 且于 L^1 收敛。

证明 a.s. 收敛：与定理 6.20 的证明相同，用上穿不等式 $(b-a)\mathbb{E}[U^{(N)}] \leq \mathbb{E}[(X_0-a)^-]$ 。一致可积： X^- 是下鞅 ($x \mapsto x^-$ 凸不减)，故 $\mathbb{E}X_n^- \leq \mathbb{E}X_0^-$ ，于是 $\sup_n \mathbb{E}|X_n| = \sup_n (\mathbb{E}X_n + 2\mathbb{E}X_n^-) < \infty$ 。 $\mathbb{E}X_n$ 随 $n \downarrow -\infty$ 递增且有界，给定 $\varepsilon > 0$ 取 $k \leq 0$ 使 $\mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_k + \varepsilon$ 对 $n \leq k$ 成立。对 $n \leq k$ ， $A \in \mathcal{G}_n$ ，上鞅性质给出 $\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A] \geq \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_A]$ 。于是

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| > \lambda\}}] &= \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{X_n \leq \lambda\}}] - \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{X_n < -\lambda\}}] \\ &\leq \mathbb{E}[X_k] + \varepsilon - \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{\{X_n \leq \lambda\}}] - \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{\{X_n < -\lambda\}}] \leq \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{\{|X_n| > \lambda\}}] + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $\mathbb{P}(|X_n| > \lambda) \leq \sup_m \mathbb{E}|X_m|/\lambda$ 一致地小，右边对充分大的 λ 一致地 $\leq 2\varepsilon$ 。有限个 $n \in (k, 0]$ 不影响一致可积性。 L^1 收敛由 Vitali 定理。

定理 10.11 (正则化定理)

设滤子满足通常条件， X 是上鞅，且 $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ 右连续。则 X 有一个修正 $\tilde{X}$ ，其路径右连续且有左极限 (càdlàg)，并且 $\tilde{X}$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ -上鞅。特别地，满足通常条件的滤子下的每个鞅都有 càdlàg 修正。

证明 令 D 为非负二进制有理数集。固定 $T \in \mathbb{N}^*$ 。对 $D \cap [0, T]$ 的有限子集 $\{s_0 < \dots < s_n\}$ 上的离散上鞅，由定理 6.7 (停止于首次 $\geq \lambda$ 的时刻) 得 $\lambda \mathbb{P}(\max_i X_{s_i} \geq \lambda) \leq \mathbb{E}X_0 + \mathbb{E}X_T^-$ ，由定理 6.8 用于下鞅 X^- 得 $\lambda \mathbb{P}(\max_i X_{s_i}^- \geq \lambda) \leq \mathbb{E}X_T^-$ ；由定理 6.10，对 $[a, b]$ 的上穿次数的期望 $\leq \mathbb{E}[(X_T - a)^-]/(b - a)$ 。取有限子集递增到 $D \cap [0, T]$ ，由单调收敛：a.s. $\sup_{s \in D \cap [0, T]} |X_s| < \infty$ ，且对一切有理 $a < b$ ， $(X_s)_{s \in D \cap [0, T]}$ 的上穿次数有限。设 N 为使上述性质对某个 T 不成立的 ω 的集合， $\mathbb{P}(N) = 0$ ， $N \in \mathcal{F}$ (从而 $N \in \mathcal{F}_0$)。

对 $\omega \notin N$ ，由引理 6.9 的论证，对每个 $t \geq 0$ ， $\lim_{s \downarrow t, s \in D} X_s(\omega)$ 与 ($t > 0$ 时) $\lim_{s \uparrow t, s \in D} X_s(\omega)$ 存在且有限。令 $\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{s \downarrow t, s \in D} X_s(\omega)$ ($\omega \notin N$)， $\tilde{X}_t = 0$ ($\omega \in N$)。容易验证 $\tilde{X}$ 的路径是 càdlàg 的 (右极限函数在每点右连续，且在每点有左极限)。 $\tilde{X}_t$ 是 $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ -可测的。

取 $s_n \in D$ ， $s_n \downarrow t$ 。 (X_{s_n}) 关于 $(\mathcal{F}_{s_n})$ 是反向上鞅， $\mathbb{E}X_{s_n} \leq \mathbb{E}X_t$ ，由引理 10.10， $X_{s_n} \rightarrow \tilde{X}_t$ 于 L^1 。于是对 $A \in \mathcal{F}_t$ ， $\mathbb{E}[X_t \mathbf{1}_A] \geq \mathbb{E}[X_{s_n} \mathbf{1}_A] \rightarrow \mathbb{E}[\tilde{X}_t \mathbf{1}_A]$ ，即 $X_t \geq \tilde{X}_t$ a.s. ($\tilde{X}_t$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的)。而 $\mathbb{E}\tilde{X}_t = \lim \mathbb{E}X_{s_n} = \mathbb{E}X_t$ (右连续性)，故 $X_t = \tilde{X}_t$ a.s.。修正与原过程的上鞅性质相同。

定理 10.12 (收敛定理)

设 X 是路径右连续的上鞅， $\sup_t \mathbb{E}[X_t^-] < \infty$ 。则 X_t 当 $t \rightarrow \infty$ 时 a.s. 收敛到 $X_\infty \in L^1$ 。对路径右连续的上鞅 X ，以下等价：(1) X 一致可积；(2) X_t a.s. 且于 L^1 收敛；(3) 存在 $Z \in L^1$ 使 $X_t = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t]$ 对一切 t 成立。此时 $X_\infty = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_\infty]$ 。

证明 对右连续函数 f ，若 $\liminf_{t \rightarrow \infty} f(t) < a < b < \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t)$ ，由右连续性可以把相应的时间点稍向右移到 D 中，于是 $f|_D$ 对 $[a, b]$ 有无穷多次上穿。由离散情形的上穿不等式与单调收敛， $X|_D$ 对每个有理区间只有有限次上穿，故 X_t a.s. 收敛；有限性与可积性由 Fatou 引理。其余部分与定理 6.15 的证明完全相同。

10.4 连续时间的可选停止定理

定理 10.13 (可选停止定理)

设 X 是路径右连续的一致可积鞅， $X_\infty = \lim X_t$ 。则对任何停时 T ， $X_T = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_T]$ ；对停时 $S \leq T$ ， $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S$ 。若 X 是路径右连续的鞅 (不必一致可积)， $S \leq T$ 是有界停时，则 $X_T \in L^1$ 且 $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S$ 。

证明 设 T_n 如命题 10.5(4)。 $(X_{k2^{-n}})_{k \in \mathbb{N}}$ 是关于 $(\mathcal{F}_{k2^{-n}})$ 的一致可积离散鞅， T_n 是其停时 (取值于 $2^{-n}\mathbb{N} \cup \{\infty\}$)，由定理 6.17， $X_{T_n} = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_{T_n}]$ 。由右连续性 $X_{T_n} \rightarrow X_T$ a.s.。 (X_{T_n}) 关于递减的 $(\mathcal{F}_{T_n})$ 是反向鞅 (塔性质)，由定理 6.20，收敛也在 L^1 中。对 $A \in \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T_n}$ ， $\mathbb{E}[X_\infty \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_{T_n} \mathbf{1}_A] \rightarrow \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_A]$ ；而 X_T 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的 (命题 10.6 与 10.3)。第二个论断由塔性质。若 $T \leq K$ 有界，把第一部分用于一致可积鞅 $(X_{t \wedge K})_{t \geq 0}$ (它等于

$\mathbb{E}[X_K | \mathcal{F}_{t \wedge K}]$ 。

推论 10.14

若 X 是路径右连续的鞅, T 是停时, 则停止过程 $X^T = (X_{t \wedge T})$ 是鞅。

证明 对 $s \leq t$, 由定理 10.13 (有界停时 $s \wedge T \leq t \wedge T$), $\mathbb{E}[X_{t \wedge T} | \mathcal{F}_{s \wedge T}] = X_{s \wedge T}$ 。对 $A \in \mathcal{F}_s$, $A \cap \{T > s\} \in \mathcal{F}_{s \wedge T}$ (检查 $A \cap \{T > s\} \cap \{s \wedge T \leq u\}$), 故 $\mathbb{E}[X_{t \wedge T} \mathbf{1}_{A \cap \{T > s\}}] = \mathbb{E}[X_{s \wedge T} \mathbf{1}_{A \cap \{T > s\}}]$; 而在 $\{T \leq s\}$ 上 $X_{t \wedge T} = X_{s \wedge T} = X_T \mathbf{1}_{\{T \leq s\}}$, 后者 $\mathcal{F}_s$ -可测。

定理 10.15 (非负上鞅的可选停止)

设 X 是路径右连续的非负上鞅, $X_\infty = \lim X_t$ 。则对停时 $S \leq T$, $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \leq X_S$ 。

证明 取 S_n, T_n 为 S, T 的二进制逼近, $S_n \leq T_n$ 。由定理 6.18, 对 $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$, $\mathbb{E}[X_{T_n} \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[X_{S_n} \mathbf{1}_A]$ 。 (X_{S_n}) 关于 $(\mathcal{F}_{S_n})$ 是反向上鞅 (再次由定理 6.18), 期望 $\leq \mathbb{E}X_0$, 由引理 10.10, $X_{S_n} \rightarrow X_S$ 于 L^1 。对左边用 Fatou 引理。

例 10.2 (布朗运动的首中时与离出时) 设 B 是一维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, $B_0 = 0$ 。

1. 对 $a > 0, \lambda > 0$, 令 $\theta = \sqrt{2\lambda}$ 。鞅 $M_t = \exp(\theta B_{t \wedge T_a} - \lambda(t \wedge T_a))$ 取值于 $[0, e^{\theta a}]$, 由推论 10.14 与定理 10.13 (有界鞅一致可积), $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$ 。由于 $T_a < \infty$ a.s. (推论 9.17), $M_\infty = e^{\theta a - \lambda T_a}$, 故 $\mathbb{E}[e^{-\lambda T_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$ 。
2. 对 $a, b > 0, T = \inf\{t : B_t \notin (-a, b)\}$ 。停止鞅 B^T 有界, $\mathbb{E}[B_T] = 0$, 故 $\mathbb{P}(B_T = b) = \frac{a}{a+b}$ 。对鞅 $B_t^2 - t$ 用有界停时 $T \wedge n$: $\mathbb{E}[T \wedge n] = \mathbb{E}[B_{T \wedge n}^2]$, 令 $n \rightarrow \infty$, 得 $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[B_T^2] = ab$ 。

10.5 Skorokhod 嵌入与 Donsker 不变原理

本节把第 7 章的随机游走与布朗运动联系起来 (GTM 295 第 14.1 节, Kemeny–Snell–Knapp 第 7.6 节): 适当标度后, 随机游走的整条路径依分布收敛到布朗运动。

定理 10.16 (Skorokhod 嵌入)

设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度, $\int x \mu(dx) = 0, \int x^2 \mu(dx) = \sigma^2 < \infty$ 。设 B 为一维布朗运动, (U, V) 是与 B 独立的随机向量, 其分布为

$$\nu(du, dv) = \frac{v-u}{c} \mu(du) \mu(dv) \mathbf{1}_{\{u < 0 < v\}} + \mu(\{0\}) \delta_{(0,0)}(du, dv), \quad c = \int_{(0,\infty)} v \mu(dv).$$

令 $T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (U, V)\}$ ($U = V = 0$ 时 $T = 0$)。则 $B_T \sim \mu, \mathbb{E}[T] = \sigma^2$ 。

证明 (若 $\mu = \delta_0$ 则平凡, 下设 $c > 0$)。由 $\int x \mu(dx) = 0, c = \int_{(-\infty,0)} (-u) \mu(du)$ 。 ν 的总质量为 $\frac{1}{c}(\mu((-\infty, 0))c + c\mu((0, \infty))) + \mu(\{0\}) = 1$ 。令 $\mathcal{G}_t = \sigma(U, V, B_s, s \leq t)$ (完备化后右连续化), B 是 $(\mathcal{G}_t)$ -布朗运动, T 是 $(\mathcal{G}_t)$ -停时。给定 $(U, V) = (u, v), u < 0 < v$, 由例 10.2(2) (应用于平移后的区间) 与冻结引理, $\mathbb{P}(B_T = v | U, V) = \frac{-u}{v-u}, \mathbb{E}[T | U, V] = -uv = \mathbb{E}[B_T^2 | U, V]$ 。于是对 Borel 集 $A \subset (0, \infty)$,

$$\mathbb{P}(B_T \in A) = \iint_{u < 0 < v} \frac{v-u}{c} \cdot \frac{-u}{v-u} \mathbf{1}_A(v) \mu(du) \mu(dv) = \mu(A),$$

对 $A \subset (-\infty, 0)$ 同理, 而 $\mathbb{P}(B_T = 0) = \mu(\{0\})$ 。最后 $\mathbb{E}T = \mathbb{E}[B_T^2] = \sigma^2$ 。

推论 10.17

在上述条件下, 存在布朗运动 W 与停时序列 $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$, 使得 $(W_{T_k} - W_{T_{k-1}}, T_k - T_{k-1})_{k \geq 1}$ 独立同分布, $W_{T_1} \sim \mu, \mathbb{E}T_1 = \sigma^2$ 。特别地 $(W_{T_k})_{k \geq 0}$ 是步长分布为 μ 的随机游走。

证明 取布朗运动 W 与独立同分布于 ν 的 $(U_k, V_k)_{k \geq 1}$ (彼此独立且与 W 独立)。令 T_1 为定理中用 (U_1, V_1) 构造的时刻, $T_k = T_{k-1} + \inf\{t : W_{T_{k-1}+t} - W_{T_{k-1}} \notin (U_k, V_k)\}$ 。关于滤子 $\mathcal{G}_t = \sigma((U_k, V_k)_k, W_s, s \leq t)$, W 仍是布

朗运动, T_k 是停时。由强马氏性, $W^{(T_{k-1})}$ 是与 $\mathcal{G}_{T_{k-1}}$ 独立的布朗运动, 而 (U_k, V_k) 也与二者独立 (它与 $\mathcal{G}_{T_{k-1}}$ 及 W 都独立, 且 $(U_j, V_j)_{j \geq k}$ 与 $\sigma((U_j, V_j)_{j < k}, W)$ 独立), 故第 k 段与前面各段独立且与第一段同分布。

定理 10.18 (Donsker 不变原理)

设 (ξ_k) 独立同分布, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\mathbb{E}\xi_1^2 = 1$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ 。令 $S_t^{(n)} = n^{-1/2}(S_{[nt]} + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1})$, $t \in [0, 1]$ (线性插值)。则在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ (一致范数) 中 $S^{(n)} \xrightarrow{(d)} B$, 即对一切有界连续 $F: C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{E}F(S^{(n)}) \rightarrow \mathbb{E}F(B)$ 。

证明 由于 $S^{(n)}$ 的分布只依赖于 (ξ_k) 的分布, 可以在推论 10.17 的空间上取 $\xi_k = W_{T_k} - W_{T_{k-1}}$ 。令 $B_t^{(n)} = n^{-1/2}W_{nt}$, 它是布朗运动。则 $S_{k/n}^{(n)} = B_{k/n}^{(n)}$ 。

由强大数定律, $T_k/k \rightarrow 1$ a.s., 从而 $\delta_n := \max_{k \leq n} |T_k - k|/n \rightarrow 0$ a.s. (若 $a_k/k \rightarrow 1$, 则对 $\varepsilon > 0$, $\max_{k \leq n} |a_k - k| \leq \max_{k \leq K} |a_k - k| + \varepsilon n$)。对 $\eta > 0$ 与 $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} |S_{k/n}^{(n)} - B_{k/n}^{(n)}| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}(\delta_n > \eta) + \mathbb{P}\left(\sup_{s, t \leq 2, |s-t| \leq \eta} |B_s^{(n)} - B_t^{(n)}| > \varepsilon\right),$$

(在 $\{\delta_n \leq \eta\}$ 上 $T_k/n \leq 1 + \eta \leq 2$)。右边第二项不依赖于 n ($B^{(n)}$ 都是布朗运动), 且由路径的一致连续性当 $\eta \rightarrow 0$ 时趋于 0; 第一项当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 0。对 $t \in [k/n, (k+1)/n]$, $S_t^{(n)}$ 位于 $S_{k/n}^{(n)}$ 与 $S_{(k+1)/n}^{(n)}$ 之间, 故

$$\sup_{t \leq 1} |S_t^{(n)} - B_t^{(n)}| \leq \max_{k \leq n} |S_{k/n}^{(n)} - B_{k/n}^{(n)}| + 2 \sup_{s, t \leq 2, |s-t| \leq 1/n} |B_s^{(n)} - B_t^{(n)}|,$$

同理依概率趋于 0。由于 $B^{(n)} \xrightarrow{(d)} B$, 对有界 Lipschitz 的 F , $|\mathbb{E}F(S^{(n)}) - \mathbb{E}F(B)| = |\mathbb{E}F(S^{(n)}) - \mathbb{E}F(B^{(n)})| \rightarrow 0$ (如命题 4.10(1)), 由定理 4.8 即得。

引理 10.19 (连续映射)

设 $X_n \xrightarrow{(d)} X$ (取值于度量空间 E), $\Psi: E \rightarrow \mathbb{R}$ 可测, 其不连续点集 D_Ψ 包含于一个 X -零的 Borel 集。则 $\Psi(X_n) \xrightarrow{(d)} \Psi(X)$ 。

证明 设 $D_\Psi \subset N$, $\mathbb{P}(X \in N) = 0$ 。对闭集 $F \subset \mathbb{R}$, $\overline{\Psi^{-1}(F)} \subset \Psi^{-1}(F) \cup N$ (若 $w_k \rightarrow w$, $\Psi(w_k) \in F$ 且 Ψ 在 w 处连续, 则 $\Psi(w) \in F$)。由定理 4.8(3), $\limsup \mathbb{P}(\Psi(X_n) \in F) \leq \mathbb{P}(X \in \overline{\Psi^{-1}(F)}) \leq \mathbb{P}(\Psi(X) \in F)$ 。

推论 10.20

在定理 10.18 的条件下, $n^{-1/2} \max_{k \leq n} S_k \xrightarrow{(d)} |N|$, $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 。

证明 $\Psi(w) = \sup_{t \leq 1} w(t)$ 连续, $\Psi(S^{(n)}) = n^{-1/2} \max_{k \leq n} S_k$; 由引理 10.19 与反射原理 $\sup_{t \leq 1} B_t \stackrel{(d)}{=} |B_1|$ 。

第 11 章 连续半鞅

随机积分的被积“积分子”是连续半鞅：连续局部鞅与有限变差过程之和。本章研究这两类过程，核心结果是连续局部鞅二次变差的存在性与刻画。

本章及以后各章中，除非特别说明，滤子 $(\mathcal{F}_t)$ 总满足通常条件。

11.1 有限变差过程

定义 11.1

适应过程 $A = (A_t)_{t \geq 0}$ 称为有限变差过程，若 $A_0 = 0$ ，且每条路径 $t \mapsto A_t(\omega)$ 连续并在每个有界区间上有界变差（第 1.6 节）。若其路径还不减，称为增过程。

记 $V_t = V_A(t)$ 为全变差过程。由连续性， V_t 可以沿 $[0, t]$ 的有理分割取上确界得到，故 V 是连续增过程。由命题 1.17， $A = \frac{1}{2}(V + A) - \frac{1}{2}(V - A)$ 是两个增过程之差。

命题 11.2

设 A 是有限变差过程， H 循序可测，且 a.s. 对一切 t ， $\int_0^t |H_s| dV_s < \infty$ 。则 $(H \cdot A)_t = \int_0^t H_s dA_s$ （在例外零集上令其为 0）是有限变差过程，且其全变差为 $\int_0^t |H_s| dV_s$ 的上界所控制。

证明 路径连续是因为 dA 无原子。适应性：固定 t ，令 $\mathcal{H}$ 为满足“ $\omega \mapsto \int_0^t h(s, \omega) dA_s^{(i)}(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的” ($A^{(1)} = \frac{1}{2}(V + A)$, $A^{(2)} = \frac{1}{2}(V - A)$) 的有界 $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -可测函数 h 全体。它包含 $h = \mathbf{1}_{[0, u]}(s) \mathbf{1}_\Gamma(\omega)$ ($u \leq t$, $\Gamma \in \mathcal{F}_t$)，因为此时积分为 $\mathbf{1}_\Gamma A_u^{(i)}$ ；这些函数构成 π -系（并含常数 1），生成 $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ ，且 $\mathcal{H}$ 对单调有界极限封闭。由定理 1.8， $\mathcal{H}$ 包含一切有界可测函数；对一般 H 截断后用单调/控制收敛。变差的估计由命题 1.17。

11.2 连续局部鞅

定义 11.3

连续适应过程 M 称为连续局部鞅，若存在停时序列 $T_n \uparrow \infty$ ，使对每个 n ， $M^{T_n} - M_0 = (M_{t \wedge T_n} - M_0)_{t \geq 0}$ 是一致可积鞅。称 (T_n) 约化 M 。

（这里不要求 M_0 可积。）

命题 11.4

设 M 为连续局部鞅。

1. 连续鞅是连续局部鞅。
2. 对任意停时 T ， M^T 是连续局部鞅。若 (T_n) 约化 M ， $S_n \uparrow \infty$ 为停时，则 $(T_n \wedge S_n)$ 也约化 M 。
3. $T_n = \inf\{t : |M_t - M_0| \geq n\}$ 约化 M ，且 $M^{T_n} - M_0$ 有界。
4. 若 $M \geq 0$ 且 $M_0 \in L^1$ ，则 M 是上鞅。
5. 若存在 $Z \in L^1$ 使 $|M_t| \leq Z$ 对一切 t 成立，则 M 是一致可积鞅。

证明 (1) 取 $T_n = n$ (M^n 是鞅 $\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{t \wedge n}]$ ，一致可积)。(2) 由推论 10.14，一致可积鞅的停止过程是一致可积鞅 ($X_t^S = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_{S \wedge t}]$ ，定理 10.13)。(3) 设 (S_k) 约化 M ， $N = M - M_0$ 。由 (2)， $N^{T_n \wedge S_k}$ 是鞅，且以 n 为界；令 $k \rightarrow \infty$ ，由控制收敛 N^{T_n} 是有界鞅。(4) 设 (T_n) 约化 M 。对 $s \leq t$ ， $M_{s \wedge T_n} = \mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s]$ (M_0 可积)，由条件

Fatou 引理 $M_s \geq \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]$, 再取期望知 M_t 可积。(5) 由条件控制收敛, $M_s = \lim_n \mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]$; 一致可积性由命题 4.4(1)。

注 连续局部鞅即使一致可积也未必是鞅。第 14 章中三维布朗运动 B 的 $1/|B_t|$ ($B_0 \neq 0$) 就是一个严格局部鞅的例子。

定理 11.5

若 M 是连续局部鞅且是有限变差过程 (或者更一般地, $M - M_0$ 是有限变差过程), 则 $M_t = M_0$ 对一切 t a.s. 成立。



证明 不妨 $M_0 = 0$ 。令 $T_n = \inf\{t : V_t \geq n\}$, 则 $|M^{T_n}| \leq V^{T_n} \leq n$, M^{T_n} 是有界鞅 (命题 11.4(5)), 只需证 $M^{T_n} = 0$ 。记 $N = M^{T_n}$, 固定 t 与分割 $0 = t_0 < \dots < t_p = t$ 。由鞅增量的正交性,

$$\mathbb{E}[N_t^2] = \mathbb{E}\left[\sum_i (N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2\right] \leq \mathbb{E}\left[n \max_i |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right].$$

当网眼 $\rightarrow 0$, 由路径一致连续性与控制收敛 (被积函数 $\leq 2n^2$), 右边 $\rightarrow 0$ 。故 $N_t = 0$ a.s., 由连续性对一切 t 成立。

11.3 二次变差

定理 11.6 (二次变差)

设 M 为连续局部鞅。存在唯一 (不计不可区分) 的增过程 $\langle M, M \rangle$ 使 $M^2 - \langle M, M \rangle$ 是连续局部鞅。并且对每个 $t > 0$ 及 $[0, t]$ 的任意分割序列 $0 = t_0^n < \dots < t_{p_n}^n = t$, 若网眼 $\rightarrow 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M, M \rangle_t.$$

$\langle M, M \rangle$ 称为 M 的二次变差, 也记为 $\langle M \rangle$ 。



证明 唯一性: 若 A, A' 都满足要求, 则 $A - A' = (M^2 - A') - (M^2 - A)$ 是有限变差的连续局部鞅, 由定理 11.5 为 0。

第一步: 有界鞅。设 $M_0 = 0$, $|M_t| \leq K$ 对一切 t , M 是鞅。固定 $T > 0$ 。对 $[0, T]$ 的分割 $\Delta = \{0 = t_0 < \dots < t_p = T\}$, 令

$$X_t^\Delta = \sum_{i=1}^p M_{t_{i-1}} (M_{t_i \wedge t} - M_{t_{i-1} \wedge t}), \quad t \in [0, T].$$

X^Δ 是连续鞅 (每一项在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上是鞅变换), 且由裂项恒等式

$$M_t^2 - 2X_t^\Delta = \sum_{i=1}^p (M_{t_i \wedge t} - M_{t_{i-1} \wedge t})^2. \quad (11.1)$$

引理: 对 $[0, T]$ 的任意分割, $Q^\Delta := \sum_i (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$ 满足 $\mathbb{E}[(Q^\Delta)^2] \leq 12K^4$ 。事实上, 记 $\Delta_i = M_{t_i} - M_{t_{i-1}}$, 由正交性 $\mathbb{E}[\sum_{j>i} \Delta_j^2 | \mathcal{F}_{t_i}] = \mathbb{E}[(M_T - M_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}] \leq 4K^2$, 于是

$$\mathbb{E}[(Q^\Delta)^2] = \sum_i \mathbb{E}[\Delta_i^4] + 2 \sum_i \mathbb{E}\left[\Delta_i^2 \sum_{j>i} \Delta_j^2\right] \leq 4K^2 \mathbb{E}[Q^\Delta] + 8K^2 \mathbb{E}[Q^\Delta],$$

而 $\mathbb{E}[Q^\Delta] = \mathbb{E}[M_T^2] \leq K^2$ 。

Cauchy 性。设 Δ, Δ' 为两个分割, $\Delta'' = \Delta \cup \Delta' = \{s_0 < \dots < s_q\}$ 。对 $s \in [0, T]$ 记 $\ell_\Delta(s)$ 为 Δ 中 $< s$ 的最大点 ($s = 0$ 时为 0)。则 $X_T^\Delta - X_T^{\Delta'} = \sum_j (M_{\ell_\Delta(s_j)} - M_{\ell_{\Delta'}(s_j)})(M_{s_j} - M_{s_{j-1}})$, 由正交性与 Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}[(X_T^\Delta - X_T^{\Delta'})^2] = \mathbb{E}\left[\sum_j (M_{\ell_\Delta(s_j)} - M_{\ell_{\Delta'}(s_j)})^2 (M_{s_j} - M_{s_{j-1}})^2\right] \leq \mathbb{E}[\eta^4]^{1/2} \mathbb{E}[(Q^{\Delta''})^2]^{1/2},$$

其中 $\eta = \sup\{|M_u - M_v| : u, v \leq T, |u - v| \leq |\Delta| \vee |\Delta'|\}$ ($|\Delta|$ 表示网眼)。由路径一致连续性与控制收敛, 当网

眼 $\rightarrow 0$ 时 $\mathbb{E}[\eta^4] \rightarrow 0$ 。由 Doob 不等式 (命题 10.9), $\mathbb{E}[\sup_{t \leq T} (X_t^\Delta - X_t^{\Delta'})^2] \leq 4\mathbb{E}[(X_T^\Delta - X_T^{\Delta'})^2]$ 。

因此对任一网眼 $\rightarrow 0$ 的分割序列 Δ_n , X^{Δ_n} 在“ L^2 中关于 $[0, T]$ 上一致范数”的意义下是 Cauchy 列; 取子列使 $\sum_k \mathbb{E}[\sup_t (X_t^{\Delta_{n_k+1}} - X_t^{\Delta_{n_k}})^2]^{1/2} < \infty$, 则 a.s. $X^{\Delta_{n_k}}$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛到连续过程 Y , 且 $X^{\Delta_n} \rightarrow Y$ 于上述意义; Y 是鞅 (L^2 极限)。极限不依赖于序列 (两个序列交错得到的序列也收敛)。若取 Δ_n 逐次加细, 由 (11.1), $M^2 - 2X^{\Delta_n}$ 在 Δ_n 的分点上不减; 分点的并在 $[0, T]$ 中稠密, 故连续过程 $M^2 - 2Y$ 不减。令 $\langle M \rangle_t = M_t^2 - 2Y_t$ ($t \leq T$), 则 $\langle M \rangle$ 是增过程, $M^2 - \langle M \rangle = 2Y$ 是鞅, 且由 (11.1), $\sum_i (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 = M_T^2 - 2X_T^{\Delta_n} \rightarrow \langle M \rangle_T$ 于 L^2 。由唯一性, 不同 T 给出的过程在公共区间上一致, 于是得到 $\mathbb{R}_+$ 上的 $\langle M \rangle$ 。

第二步: 一般情形。先设 $M_0 = 0$ 。令 $T_n = \inf\{t: |M_t| \geq n\}$, M^{T_n} 是有界鞅。由唯一性, $\langle M^{T_{n+1}} \rangle^{T_n} = \langle M^{T_n} \rangle$ (因为 $(M^{T_{n+1}})^2 - \langle M^{T_{n+1}} \rangle$ 在 T_n 处停止后仍是鞅), 故可以定义 $\langle M \rangle_t = \langle M^{T_n} \rangle_t$ ($t \leq T_n$)。 $(M^2 - \langle M \rangle)^{T_n} = (M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n} \rangle$ 是鞅, 故 $M^2 - \langle M \rangle$ 是连续局部鞅。最后, 在 $\{T_n \geq t\}$ 上 $\sum_i (\Delta_i M)^2 = \sum_i (\Delta_i M^{T_n})^2$, 于是对 $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|\sum_i (\Delta_i M)^2 - \langle M \rangle_t| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(T_n < t) + \mathbb{P}(|\sum_i (\Delta_i M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n} \rangle_t| > \varepsilon)$, 先取 n 大, 再让网眼 $\rightarrow 0$ 。

最后, 若 $M_0 \neq 0$, 令 $N = M - M_0$, $\langle M \rangle := \langle N \rangle$ 。则 $M^2 - \langle M \rangle = (N^2 - \langle N \rangle) + 2M_0 N + M_0^2$, 而 $M_0 N$ 是连续局部鞅: 令 $T_n = \inf\{t: |N_t| \geq n\}$, $S_n = 0$ 于 $\{|M_0| > n\}$, $S_n = \infty$ 于其补 ($\{|M_0| > n\} \in \mathcal{F}_0$, 故 S_n 是停时), 则 $(M_0 N)^{T_n \wedge S_n} = M_0 \mathbf{1}_{\{|M_0| \leq n\}} N^{T_n}$ 是有界鞅。增量平方和只涉及 N 的增量。

例 11.1 若 B 是一维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, 则 $\langle B \rangle_t = t$ ($B_t^2 - t$ 是鞅; 与命题 9.18 一致)。

命题 11.7

设 M 为连续局部鞅, $M_0 = 0$ 。

1. 对任意停时 T , $\langle M^T \rangle = \langle M \rangle^T$ 。
2. M 是 L^2 有界鞅当且仅当 $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty] < \infty$; 此时 $M^2 - \langle M \rangle$ 是一致可积鞅, $\mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty]$ 。
3. 若 $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < \infty$ 对一切 t 成立, 则 M 是鞅, $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_t]$ 。
4. a.s. 对一切 $0 \leq a < b$: M 在 $[a, b]$ 上为常数当且仅当 $\langle M \rangle_b = \langle M \rangle_a$ 。特别地, $\langle M \rangle \equiv 0$ 当且仅当 $M \equiv 0$ 。
5. a.s. 在 $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ 上, $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ 存在且有限。

证明 (1) $(M^T)^2 - \langle M^T \rangle = (M^2 - \langle M \rangle)^T$ 是连续局部鞅, 用唯一性。(2) 若 M 是 L^2 有界鞅, 由 Doob 不等式 $\mathbb{E}[\sup_t M_t^2] \leq 4 \sup_t \mathbb{E} M_t^2 < \infty$ 。令 $T_n = \inf\{t: \langle M \rangle_t \geq n\}$; $(M^2 - \langle M \rangle)^{T_n}$ 被 $\sup_t M_t^2 + n$ 控制, 是一致可积鞅 (命题 11.4(5)), 故 $\mathbb{E}[\langle M \rangle_{T_n}] = \mathbb{E}[M_{T_n}^2] \leq \mathbb{E}[\sup_t M_t^2]$, 单调收敛得 $\mathbb{E}\langle M \rangle_\infty < \infty$ 。反之, 若 $\mathbb{E}\langle M \rangle_\infty < \infty$, 令 $S_n = \inf\{t: |M_t| \geq n\}$, 则 M^{S_n} 有界, $\mathbb{E}[M_{t \wedge S_n}^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_{t \wedge S_n}] \leq \mathbb{E}\langle M \rangle_\infty$; 由 Doob 不等式与单调收敛, $\mathbb{E}[\sup_{s \leq t \wedge S_n} M_s^2] \leq 4\mathbb{E}\langle M \rangle_\infty$, 令 $n \rightarrow \infty$, $\mathbb{E}[\sup_t M_t^2] < \infty$, 于是 M 被可积变量控制, 是一致可积鞅 (命题 11.4(5)), L^2 有界; $M^2 - \langle M \rangle$ 被 $\sup_t M_t^2 + \langle M \rangle_\infty$ 控制, 同样是一致可积鞅。(3) 把 (2) 用于 M^t 。(4) 若 M 在 $[a, b]$ 上为常数, 由定理 11.6 中的逼近 (取包含 a, b 为分点的分割), $\langle M \rangle_b - \langle M \rangle_a$ 是 0 的依概率极限。对固定的 a , $N_t = M_{a+t} - M_a$ 是关于 $(\mathcal{F}_{a+t})$ 的连续局部鞅, $\langle N \rangle_t = \langle M \rangle_{a+t} - \langle M \rangle_a$ 。令 $T = \inf\{t: \langle N \rangle_t > 0\}$, 则 $\langle N^T \rangle = 0$, 由 (2), $\mathbb{E}[(N_t^T)^2] = 0$, 故 M 在 $[a, a+T]$ 上为常数。对一切有理 a 同时成立; 对一般的 $a < b$ 用有理数从右逼近 a 及连续性。(5) 令 $T_n = \inf\{t: \langle M \rangle_t \geq n\}$, 由 (2), M^{T_n} 是 L^2 有界鞅, a.s. 收敛; 在 $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ 上 $M = M^{T_n}$ 。

11.4 两个局部鞅的括号

定义 11.8

对连续局部鞅 M, N , 定义括号 $\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}(\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle)$ 。

命题 11.9

(1) $\langle M, N \rangle$ 是唯一 (不计不可区分) 的有限变差过程, 使 $MN - \langle M, N \rangle$ 是连续局部鞅。(2) 对网眼 $\rightarrow 0$ 的分割序列, $\sum_i (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(N_{t_i} - N_{t_{i-1}}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M, N \rangle_t$ 。(3) $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle$ 对称双线性; $\langle M^T, N \rangle = \langle M^T, N^T \rangle = \langle M, N \rangle^T$ 。(4) 若 M, N 是 L^2 有界鞅, 则 $MN - \langle M, N \rangle$ 是一致可积鞅, $\mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[M_0 N_0] + \mathbb{E}[\langle M, N \rangle_\infty]$ 。



证明 (1) 由极化恒等式 $MN = \frac{1}{4}((M+N)^2 - (M-N)^2)$; 唯一性由定理 11.5。(2) 对和式用极化恒等式。(3) 双线性由 (2); $\langle M^T, N \rangle$: 由 (2), $\sum \Delta_i M^T \Delta_i N$ 与 $\sum \Delta_i M^T \Delta_i N^T$ 在 T 之后的项为 0, 在 T 之前相同 (含 T 的那一项的差趋于 0)。(4) 由命题 11.7(2) 与极化。

例 11.2 若 $B = (B^1, \dots, B^d)$ 是 d 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, 则 $\langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{ij}t$: 对 $i \neq j$, $B^i B^j$ 是鞅 ($B_t^i - B_s^i$ 与 $B_t^j - B_s^j$ 独立且都与 $\mathcal{F}_s$ 独立)。

命题 11.10 (Kunita-Watanabe 不等式)

设 M, N 为连续局部鞅, V 为 $\langle M, N \rangle$ 的全变差过程, H, K 为可测过程。则 a.s.

$$\int_0^\infty |H_s| |K_s| dV_s \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d\langle N \rangle_s \right)^{1/2}.$$



证明 对有理数 r 与 $s < t$, $\langle M+rN \rangle_t - \langle M+rN \rangle_s = (\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s) + 2r(\langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s) + r^2(\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s) \geq 0$ a.s.; 对可数个 (r, s, t) 同时成立, 由连续性对一切实数 r 与 $s < t$ 成立, 故判别式非正: $|\langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s| \leq (\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s)^{1/2} (\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s)^{1/2}$ 。对 $[s, t]$ 的分割求和并用 Cauchy-Schwarz, $V_t - V_s \leq (\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s)^{1/2} (\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s)^{1/2} \leq \frac{1}{2}(\lambda(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s) + \lambda^{-1}(\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s))$ 对一切 $\lambda > 0$ 成立。

固定这样的 ω 与 $T > 0$, 记 $\mu = dV$, $\alpha = d\langle M \rangle$, $\beta = d\langle N \rangle$ ($[0, T]$ 上的有限无原子测度)。上式说明测度 $\frac{1}{2}(\lambda\alpha + \lambda^{-1}\beta) - \mu$ 在每个区间 $(s, t]$ 上非负, 从而在每个开集 (区间的可数不交并) 上非负, 由命题 1.14 (外正则性) 在每个 Borel 集 A 上非负。对 λ 取下确界得 $\mu(A) \leq \alpha(A)^{1/2} \beta(A)^{1/2}$ 。若 $|H| = \sum_i h_i \mathbf{1}_{A_i}$, $|K| = \sum_i k_i \mathbf{1}_{A_i}$ (A_i 不交), 则由 Cauchy-Schwarz, $\int |H| |K| d\mu \leq \sum_i h_i k_i \alpha(A_i)^{1/2} \beta(A_i)^{1/2} \leq (\sum_i h_i^2 \alpha(A_i))^{1/2} (\sum_i k_i^2 \beta(A_i))^{1/2}$ 。一般情形用简单函数从下逼近并用单调收敛, 再令 $T \rightarrow \infty$ 。

11.5 连续半鞅

定义 11.11

过程 X 称为连续半鞅, 若 $X = X_0 + M + A$, 其中 M 是 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅, A 是有限变差过程。



由定理 11.5, 这个分解是唯一的 (不计不可区分)。对连续半鞅 $X = X_0 + M + A$, $Y = Y_0 + N + A'$, 定义 $\langle X, Y \rangle = \langle M, N \rangle$ 。

命题 11.12

对 $[0, t]$ 的网眼 $\rightarrow 0$ 的分割序列, $\sum_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, Y \rangle_t$ 。



证明 展开后, 含有限变差部分的交叉项被 $V_A(t) \max_i |\Delta_i N|$ 之类的量控制, 由路径一致连续性 a.s. 趋于 0; 剩下的部分由命题 11.9(2)。

特别地, 若 A 是有限变差过程, X 是连续半鞅, 则 $\langle A, X \rangle = 0$ 。

第 12 章 随机积分与 Itô 公式

本章构造关于连续半鞅的随机积分 $\int_0^t H_s dX_s$, 证明 Itô 公式, 并给出它的主要推论: Lévy 对布朗运动的刻画、Dambis–Dubins–Schwarz 时间变换定理、Burkholder–Davis–Gundy 不等式、布朗滤子中的鞅表示定理与 Girsanov 定理。滤子满足通常条件。

12.1 关于 L^2 有界鞅的随机积分

令 $\mathbb{H}^2$ 为满足 $M_0 = 0$ 的 L^2 有界连续鞅全体 (不可区分的过程视为相同)。由命题 11.7(2), $M_\infty = \lim M_t$ 存在, $\mathbb{E}[M_\infty^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty]$ 。在 $\mathbb{H}^2$ 上定义内积 $(M, N)_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[\langle M, N \rangle_\infty]$ (命题 11.9(4))。

命题 12.1

$\mathbb{H}^2$ 是 Hilbert 空间。

证明 若 $(M, M)_{\mathbb{H}^2} = 0$, 由 Doob 不等式 $\mathbb{E}[\sup_t M_t^2] \leq 4\mathbb{E}[M_\infty^2] = 0$ 。完备性: 若 (M^n) 是 Cauchy 列, 由 Doob 不等式 $\mathbb{E}[\sup_t (M_t^n - M_t^m)^2] \leq 4\|M^n - M^m\|_{\mathbb{H}^2}^2$, 取子列使 a.s. 一致收敛, 极限 M 连续; $M_t = \lim M_t^n$ 于 L^2 , 故 M 是鞅, 且 $M^n \rightarrow M$ 于 $\mathbb{H}^2$ 。

$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的循序 σ -代数 $\mathcal{P}$ 由使 $\mathbf{1}_A$ 循序可测的集合 A 组成; 过程循序可测当且仅当它作为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的函数是 $\mathcal{P}$ -可测的。对 $M \in \mathbb{H}^2$, 令 $L^2(M) = L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, d\mathbb{P} d\langle M \rangle)$, 即满足 $\|H\|_{L^2(M)}^2 := \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s] < \infty$ 的循序可测过程 H (模去范数为零者)。

初等过程是形如

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s)$$

的过程, 其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, $H_{(i)}$ 是有界 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测的。初等过程全体记为 $\mathcal{E}$ 。

命题 12.2

对 $M \in \mathbb{H}^2$, $\mathcal{E}$ 在 $L^2(M)$ 中稠密。

证明 设 $K \in L^2(M)$ 与 $\mathcal{E}$ 正交。由 Cauchy–Schwarz, $\mathbb{E} \int_0^\infty |K_s| d\langle M \rangle_s \leq \|K\|_{L^2(M)} \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty]^{1/2} < \infty$, 故 $X_t = \int_0^t K_s d\langle M \rangle_s$ 是有限变差过程 (命题 11.2) 且 $X_t \in L^1$ 。对 $s < t$ 与有界 $\mathcal{F}_s$ -可测 F , 与 $F \mathbf{1}_{(s, t]}$ 正交意味着 $\mathbb{E}[F(X_t - X_s)] = 0$, 即 X 是连续鞅。由定理 11.5, $X = 0$, 于是 a.s. 测度 $K_s d\langle M \rangle_s$ 在一切区间上为零, 从而为零测度, 即 $K = 0$ 于 $L^2(M)$ 。

引理 12.3

设 Y 是适应、路径右连续的过程, 对每个有界停时 T , $Y_T \in L^1$ 且 $\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[Y_0]$ 。则 Y 是鞅。

证明 对 $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$, $T = s \mathbf{1}_A + t \mathbf{1}_{A^c}$ 是停时, $\mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[Y_t]$ 给出 $\mathbb{E}[Y_s \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y_t \mathbf{1}_A]$ 。

定理 12.4

设 $M \in \mathbb{H}^2$, $H \in L^2(M)$ 。存在唯一的 $H \cdot M \in \mathbb{H}^2$, 使得对一切 $N \in \mathbb{H}^2$,

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle. \quad (12.1)$$

映射 $H \mapsto H \cdot M$ 是从 $L^2(M)$ 到 $\mathbb{H}^2$ 的线性等距。若 $H \in \mathcal{E}$ 如上, 则 $(H \cdot M)_t = \sum_i H_{(i)}(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$ 。

证明 (右边 $H \cdot \langle M, N \rangle$ 有意义: 由 Kunita–Watanabe 不等式, $\int |H| dV_{\langle M, N \rangle} \leq (\int H^2 d\langle M \rangle)^{1/2} \langle N \rangle_\infty^{1/2} < \infty$ a.s.)

唯一性: 若 X, X' 都满足 (12.1), 则 $\langle X - X', N \rangle = 0$ 对一切 $N \in \mathbb{H}^2$, 取 $N = X - X'$ 得 $X = X'$ (命题 11.7(4))。

初等过程: 令 $X = \sum_i H_{(i)}(M^{t_{i+1}} - M^{t_i})$ 。每一项 $H_{(i)}(M^{t_{i+1}} - M^{t_i})$ 是 L^2 有界连续鞅 (它在 $[0, t_i]$ 上为 0, 在 $t \geq t_i$ 时对 $\mathcal{F}_{t_i}$ -可测有界因子提取), 且由命题 11.9(3) 与第 11 章中括号的逼近公式, $\langle H_{(i)}(M^{t_{i+1}} - M^{t_i}), N \rangle = H_{(i)}(\langle M, N \rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle^{t_i})$ 。求和得 (12.1)。特别地 $\|X\|_{\mathbb{H}^2}^2 = \mathbb{E}[\langle X \rangle_\infty] = \mathbb{E}[(H^2 \cdot \langle M \rangle)_\infty] = \|H\|_{L^2(M)}^2$ 。

延拓: 由命题 12.2 与等距性, $H \mapsto H \cdot M$ 唯一延拓为 $L^2(M) \rightarrow \mathbb{H}^2$ 的等距。验证 (12.1): 设 $H^n \in \mathcal{E}$, $H^n \rightarrow H$ 于 $L^2(M)$, $X^n = H^n \cdot M \rightarrow X$ 于 $\mathbb{H}^2$ 。对 $N \in \mathbb{H}^2$, 由 Kunita-Watanabe 与 Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}[\langle X^n - X, N \rangle_\infty] \leq \|X^n - X\|_{\mathbb{H}^2} \|N\|_{\mathbb{H}^2} \rightarrow 0, \quad \mathbb{E}\left[\int_0^\infty |H_s^n - H_s| dV_s\right] \leq \|H^n - H\|_{L^2(M)} \|N\|_{\mathbb{H}^2} \rightarrow 0,$$

其中 V 为 $\langle M, N \rangle$ 的全变差。因此 $\mathbb{E}[X_\infty N_\infty] = \lim \mathbb{E}[X_\infty^n N_\infty] = \lim \mathbb{E}[(H^n \cdot \langle M, N \rangle)_\infty] = \mathbb{E}[(H \cdot \langle M, N \rangle)_\infty]$ 。把这个等式用于 N^T (T 为有界停时, $\langle M, N^T \rangle = \langle M, N \rangle^T$) 得 $\mathbb{E}[X_T N_T] = \mathbb{E}[X_\infty N_T] = \mathbb{E}[(H \cdot \langle M, N \rangle)_T]$ 。由引理 12.3, $XN - H \cdot \langle M, N \rangle$ 是鞅, 从而 $\langle X, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle$ 。

命题 12.5

设 $M, N \in \mathbb{H}^2$, $H \in L^2(M)$, $K \in L^2(N)$ 。

1. $\langle H \cdot M, K \cdot N \rangle = HK \cdot \langle M, N \rangle$; $\mathbb{E}[(H \cdot M)_t] = 0$, $\mathbb{E}[(H \cdot M)_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s]$ 。
2. (结合律) 若 K 循序可测且 $KH \in L^2(M)$, 则 $K \in L^2(H \cdot M)$ 且 $K \cdot (H \cdot M) = (KH) \cdot M$ 。
3. (停止) 对停时 T , $(H \cdot M)^T = (H \mathbf{1}_{[0, T]}) \cdot M = H \cdot M^T$ 。

证明 (1) 两次应用 (12.1)。(2) $\langle H \cdot M \rangle = H^2 \cdot \langle M \rangle$, 故 $\mathbb{E} \int K^2 d\langle H \cdot M \rangle = \mathbb{E} \int K^2 H^2 d\langle M \rangle < \infty$ 。对 $N \in \mathbb{H}^2$, $\langle K \cdot (H \cdot M), N \rangle = K \cdot \langle H \cdot M, N \rangle = K \cdot (H \cdot \langle M, N \rangle) = KH \cdot \langle M, N \rangle$ (Stieltjes 积分的结合律)。由唯一性得证。(3) 对 $N \in \mathbb{H}^2$, $\langle (H \cdot M)^T, N \rangle = \langle H \cdot M, N \rangle^T = (H \cdot \langle M, N \rangle)^T = H \mathbf{1}_{[0, T]} \cdot \langle M, N \rangle$, 且 $= H \cdot \langle M, N \rangle^T = H \cdot \langle M^T, N \rangle = \langle H \cdot M^T, N \rangle$ 。

12.2 关于局部鞅与半鞅的随机积分

对连续局部鞅 M , 令 $L_{\text{loc}}^2(M)$ 为满足“a.s. 对一切 t , $\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty$ ”的循序可测过程 H 全体。

定理 12.6

设 M 为连续局部鞅, $H \in L_{\text{loc}}^2(M)$ 。存在唯一的连续局部鞅 $H \cdot M$, $(H \cdot M)_0 = 0$, 使得对一切连续局部鞅 N , $\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle$ 。若 $M \in \mathbb{H}^2$, $H \in L^2(M)$, 它与定理 12.4 中的定义一致。命题 12.5 中的结合律与停止性质仍然成立。

证明 不妨 $M_0 = 0$ ($\langle M, N \rangle$ 只依赖于 $M - M_0$)。令 $T_n = \inf\{t : \int_0^t (1 + H_s^2) d\langle M \rangle_s \geq n\}$, 则 $\langle M^{T_n} \rangle_\infty \leq n$, $M^{T_n} \in \mathbb{H}^2$, $H \in L^2(M^{T_n})$ 。令 $X^n = H \cdot M^{T_n}$ 。由命题 12.5(3), $(X^{n+1})^{T_n} = H \cdot M^{T_{n+1} \wedge T_n} = X^n$, 故可以定义 $X_t = X_t^n$ ($t \leq T_n$), X 是连续局部鞅 ($X^{T_n} = X^n$)。对连续局部鞅 N , 令 $S_n = \inf\{t : |N_t - N_0| + \langle N \rangle_t \geq n\}$, $N' = N^{S_n} - N_0 \in \mathbb{H}^2$, $R_n = T_n \wedge S_n$ 。由 (12.1) 与命题 11.9(3),

$$\langle X, N \rangle^{R_n} = \langle X^n, N' \rangle^{R_n} = (H \cdot \langle M^{T_n}, N' \rangle)^{R_n} = (H \cdot \langle M, N \rangle)^{R_n},$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即得。唯一性同前。

定义 12.7

设 $X = X_0 + M + A$ 为连续半鞅。循序可测过程 H 称为局部有界的, 若 a.s. 对一切 t , $\sup_{s \leq t} |H_s| < \infty$ (例如适应的连续过程)。对局部有界的 H , 定义 $H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$, 记为 $\int_0^t H_s dX_s$ 。

$H \cdot X$ 是连续半鞅, 其局部鞅部分为 $H \cdot M$ 。由前面的结果: $(H, X) \mapsto H \cdot X$ 双线性; $K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X$; $(H \cdot X)^T = H \mathbf{1}_{[0, T]} \cdot X = H \cdot X^T$; $\langle H \cdot X, K \cdot Y \rangle = HK \cdot \langle X, Y \rangle$ 。

引理 12.8

设 H 局部有界, 在 $[0, s]$ 上为 0, Z 是 $\mathcal{F}_s$ -可测的实随机变量。则 $(ZH) \cdot X = Z(H \cdot X)$ 。特别地, 对 $0 \leq s < t$, $(Z\mathbf{1}_{(s,t]}) \cdot X = Z(X^t - X^s)$ 。



证明 有限变差部分是 Stieltjes 积分的平凡性质。对局部鞅部分, 记 $Y = H \cdot M$, 它在 $[0, s]$ 上为 0。令 $R_n = \infty$ 于 $\{|Z| \leq n\}$, $R_n = s$ 于 $\{|Z| > n\}$, 它是停时 ($\{R_n \leq t\}$ 对 $t < s$ 为空, 对 $t \geq s$ 为 $\{|Z| > n\} \in \mathcal{F}_s$)。若 U 是在 $[0, s]$ 上为 0 的连续局部鞅, 则 ZU 也是: 以 (T_k) 约化 U 使 U^{T_k} 有界, 则 $(ZU)^{T_k \wedge R_n} = Z\mathbf{1}_{\{|Z| \leq n\}} U^{T_k}$, 对 $u \leq t$ 直接验证 $\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{|Z| \leq n\}} U_t^{T_k} | \mathcal{F}_u] = Z\mathbf{1}_{\{|Z| \leq n\}} U_u^{T_k}$ ($u \geq s$ 时提出 $\mathcal{F}_u$ -可测因子; $u < s$ 时先对 $\mathcal{F}_s$ 取条件期望, 得 $Z\mathbf{1}_{U_s^{T_k}} = 0$)。把这个事实用于 $U = Y$ 与 $U = YN - \langle Y, N \rangle$ (N 为任意连续局部鞅), 得 $\langle ZY, N \rangle = Z\langle Y, N \rangle = ZH \cdot \langle M, N \rangle$, 由唯一性 $ZY = (ZH) \cdot M$ 。

命题 12.9 (随机控制收敛定理)

设 X 为连续半鞅, H^n, H 循序可测, $H_s^n \rightarrow H_s$ 对一切 s a.s. 成立, 且 $|H^n| \leq K$, K 局部有界。则对每个 t , $\sup_{s \leq t} |(H^n \cdot X)_s - (H \cdot X)_s| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ 。



证明 有限变差部分: 对每个 ω 用控制收敛 (关于 dV_A)。局部鞅部分 (不妨 $M_0 = 0$): 令 $T_k = \inf\{s : \langle M \rangle_s + \int_0^s K_u^2 d\langle M \rangle_u \geq k\}$, 则 $M^{T_k} \in \mathbb{H}^2$ 。由等距性与 Doob 不等式, $\mathbb{E}[\sup_{s \leq t \wedge T_k} ((H^n - H) \cdot M)_s^2] \leq 4\mathbb{E}[\int_0^{t \wedge T_k} (H_s^n - H_s)^2 d\langle M \rangle_s] \rightarrow 0$ (控制收敛: 被积函数 $\leq 4K^2$, 而 $\mathbb{E} \int_0^{T_k} K^2 d\langle M \rangle \leq k$)。而 $\mathbb{P}(T_k < t) \rightarrow 0$ 。

命题 12.10 (Riemann 和逼近)

设 X 为连续半鞅, H 是适应的连续过程。则对 $[0, t]$ 的网眼 $\rightarrow 0$ 的分割序列,

$$\sum_i H_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t H_s dX_s.$$



证明 令 $H^n = \sum_i H_{t_{i-1}} \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}$ 。由引理 12.8, 左边等于 $(H^n \cdot X)_t$ 。 $H_s^n \rightarrow H_s$ ($s \in (0, t]$), $|H_s^n| \leq \sup_{u \leq s} |H_u|$, 用命题 12.9。

12.3 Itô 公式

引理 12.11

设 X, Y 为连续半鞅, h 是适应的连续过程。则对 $[0, t]$ 的网眼 $\rightarrow 0$ 的分割序列,

$$\sum_i h_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t h_s d\langle X, Y \rangle_s.$$



证明 由极化, 只需考虑 $X = Y$ 。首先, 由恒等式 $\sum_i (\Delta_i X)^2 = X_t^2 - X_0^2 - 2 \sum_i X_{t_{i-1}} \Delta_i X$ 、命题 11.12 与命题 12.10,

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X \rangle_t,$$

特别地 X^2 是连续半鞅。其次, 由 $(\Delta_i X)^2 = \Delta_i(X^2) - 2X_{t_{i-1}} \Delta_i X$,

$$\sum_i h_{t_{i-1}} (\Delta_i X)^2 = \sum_i h_{t_{i-1}} \Delta_i(X^2) - 2 \sum_i h_{t_{i-1}} X_{t_{i-1}} \Delta_i X \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t h d(X^2) - 2 \int_0^t h X dX = \int_0^t h d\langle X \rangle,$$

其中收敛由命题 12.10 (应用于半鞅 X^2 与 X), 最后的等式由 X^2 的上述分解与结合律。

上面的证明给出了分部积分公式: 对连续半鞅 X, Y ,

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t. \quad (12.2)$$

($X = Y$ 时上面已证; 一般情形对 $X + Y$ 与 $X - Y$ 应用后相减。)

定理 12.12 (Itô 公式)

设 $X^1, \dots, X^p$ 为连续半鞅, $F \in C^2(\mathbb{R}^p)$ 。则 a.s. 对一切 $t \geq 0$,

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \partial_i F(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \int_0^t \partial_{ij} F(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$



证明 固定 t , 取 $[0, t]$ 的网眼 $\rightarrow 0$ 的分割序列。由 Taylor 公式,

$$F(X_{t_i}) - F(X_{t_{i-1}}) = \sum_j \partial_j F(X_{t_{i-1}}) \Delta_i X^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} f_{n,i}^{jk} \Delta_i X^j \Delta_i X^k,$$

其中 $f_{n,i}^{jk} = \partial_{jk} F(X_{t_{i-1}} + \theta_{n,i} \Delta_i X)$, $\theta_{n,i} \in [0, 1]$ 。对 i 求和。由命题 12.10, 第一项依概率收敛到 $\sum_j \int_0^t \partial_j F(X_s) dX_s^j$ 。由引理 12.11, $\sum_i \partial_{jk} F(X_{t_{i-1}}) \Delta_i X^j \Delta_i X^k \rightarrow \int_0^t \partial_{jk} F(X_s) d\langle X^j, X^k \rangle_s$ 。剩下的误差不超过

$$\sup_i \max_{j,k} |f_{n,i}^{jk} - \partial_{jk} F(X_{t_{i-1}})| \cdot \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_j |\Delta_i X^j| \right)^2,$$

第一个因子由 $\partial_{jk} F$ 在紧集上的一致连续性与路径的一致连续性 a.s. 趋于 0, 第二个因子依概率有界 (命题 11.12)。因此等式对固定的 t a.s. 成立; 两边都是连续过程, 故 a.s. 对一切 t 成立。

注 若 $F(t, x)$ 关于 t 是 C^1 、关于 x 是 C^2 的, 则 $F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \partial_t F(s, X_s) ds + \sum_i \int_0^t \partial_{x_i} F dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \partial_{x_i x_j} F d\langle X^i, X^j \rangle_s$ 。证明相同: 对 t 方向只用一阶 Taylor 展开, 误差项被 $\sup |\partial_t F(\cdot) - \partial_t F(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})| \cdot t$ 控制。类似地, 若 F 只在开集 $U \subset \mathbb{R}^p$ 上是 C^2 的, 而 X 的路径取值于 U , 则公式仍成立: 令 $K_n = \{x \in U : |x| \leq n, d(x, U^c) \geq 1/n\}$, T_n 为 X 离开 K_n 的时刻 ($T_n \uparrow \infty$), 取 $\chi_n \in C_c^\infty(U)$ 在 K_n 上等于 1, 对 $C^2(\mathbb{R}^p)$ 函数 $\chi_n F$ 与 X^{T_n} 应用定理即可。

例 12.1 (1) 对布朗运动, $B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t$ 。(2) 若 M 是连续局部鞅, 则 $\mathcal{E}(M)_t := \exp(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t)$ 满足 $\mathcal{E}(M)_t = e^{M_0} + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s dM_s$, 故是连续局部鞅 (称为指数鞅); 它非负, 若 $M_0 = 0$ 则是 $\mathbb{E} \leq 1$ 的上鞅 (命题 11.4(4))。(3) 对 d 维布朗运动与 $F \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t \nabla F(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta F(B_s) ds$ 。

命题 12.13 (指数鞅不等式)

设 M 为连续局部鞅, $M_0 = 0$ 。则对 $x, y > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} M_t \geq x, \langle M \rangle_\infty \leq y\right) \leq e^{-x^2/(2y)}.$$



证明 对 $\lambda > 0$, $\mathcal{E}(\lambda M)$ 是非负上鞅, $\mathbb{E}[\mathcal{E}(\lambda M)_T] \leq 1$ 对一切停时成立 (定理 10.15)。令 $T = \inf\{t : M_t \geq x\}$ 。在所求事件上, $T < \infty$, $\mathcal{E}(\lambda M)_T \geq e^{\lambda x - \lambda^2 y/2}$ 。故所求概率 $\leq e^{-\lambda x + \lambda^2 y/2}$, 取 $\lambda = x/y$ 。

这是 Azuma–Hoeffding 不等式 (定理 6.23) 的连续类比; 对布朗运动 ($\langle B \rangle_t = t$), 它给出 $\mathbb{P}(\sup_{s \leq t} B_s \geq x) \leq e^{-x^2/(2t)}$ 。

12.4 Lévy 刻画与 Dambis–Dubins–Schwarz 定理

定理 12.14 (Lévy)

设 $X = (X^1, \dots, X^d)$ 是连续局部鞅, $X_0 = 0$, $\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij} t$ 。则 X 是 d 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。



证明 固定 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 。对 $F(t, x) = \exp(i\langle \xi, x \rangle + \frac{1}{2}|\xi|^2 t)$ (分别对实部与虚部) 用 Itô 公式, $Z_t = F(t, X_t)$ 满足 $Z_t = 1 + i \sum_j \int_0^t \xi_j Z_s dX_s^j$ (漂移项 $\frac{1}{2}|\xi|^2 Z dt - \frac{1}{2} \sum_j \xi_j^2 Z dt$ 抵消), 故 Z 的实部与虚部是连续局部鞅, 且在每个 $[0, T]$ 上有界, 从而是鞅 (命题 11.4(5))。于是对 $s < t$, $\mathbb{E}[e^{i\langle \xi, X_t - X_s \rangle} | \mathcal{F}_s] = e^{-|\xi|^2(t-s)/2}$ 。对 $A \in \mathcal{F}_s$, $\mathbb{P}(A) > 0$, 这说明在 $\mathbb{P}(\cdot | A)$ 下 $X_t - X_s$ 的特征函数是 $\mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$ 的, 由定理 2.11, $\mathbb{P}(\{X_t - X_s \in C\} \cap A) = \mathbb{P}(A) \mathcal{N}(0, (t-s)I)(C)$ 。故 $X_t - X_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立且服从 $\mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$ 。由此 X 的增量独立 (归纳), X 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动。

定理 12.15 (Dambis–Dubins–Schwarz)

设 M 为连续局部鞅, $M_0 = 0$, 且 $\langle M \rangle_\infty = \infty$ a.s. 令 $\tau_r = \inf\{t : \langle M \rangle_t > r\}$, $\beta_r = M_{\tau_r}$, $\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}$. 则 $(\beta_r)_{r \geq 0}$ 是 $(\mathcal{G}_r)$ -布朗运动, 且 a.s. $M_t = \beta_{\langle M \rangle_t}$ 对一切 t 成立。

证明 τ_r 是停时 ($\{\tau_r < t\} = \{\langle M \rangle_t > r\}$, 滤子右连续), $r \mapsto \tau_r$ 不减右连续, $\tau_r < \infty$, $\langle M \rangle_{\tau_r} = r$. 由命题 10.5(3), $(\mathcal{G}_r)$ 右连续, 显然完备。

连续性: $\tau_{r-} = \lim_{s \uparrow r} \tau_s = \inf\{t : \langle M \rangle_t = r\}$, 而 $\langle M \rangle$ 在 $[\tau_{r-}, \tau_r]$ 上为常数, 由命题 11.7(4), a.s. 对一切 r , M 在 $[\tau_{r-}, \tau_r]$ 上为常数, 故 $\beta_{r-} = M_{\tau_{r-}} = M_{\tau_r} = \beta_r$. 因此 (修改一个零集后) β 路径连续. β_r 是 $\mathcal{G}_r$ -可测的 (命题 10.6)。

鞅性: 固定 n . $\langle M^{\tau_n} \rangle_\infty = n$, 由命题 11.7(2), M^{τ_n} 与 $(M^{\tau_n})^2 - \langle M \rangle^{\tau_n}$ 是一致可积鞅. 对 $s \leq r \leq n$, 由可选停止定理 10.13 (停时 $\tau_s \leq \tau_r$), $\mathbb{E}[\beta_r | \mathcal{G}_s] = \beta_s$, $\mathbb{E}[\beta_r^2 - r | \mathcal{G}_s] = \beta_s^2 - s$. 故 β 与 $\beta^2 - r$ 是 $(\mathcal{G}_r)$ -鞅, $\langle \beta \rangle_r = r$, 由 Lévy 定理 β 是 $(\mathcal{G}_r)$ -布朗运动。

最后, $\tau_{\langle M \rangle_t} \geq t$ 且 $\langle M \rangle$ 在 $[t, \tau_{\langle M \rangle_t}]$ 上为常数, 故 $M_t = M_{\tau_{\langle M \rangle_t}} = \beta_{\langle M \rangle_t}$ 。

注 若不假设 $\langle M \rangle_\infty = \infty$, 结论在扩充概率空间上 (添加一个独立的布朗运动以延续 β 到 $[\langle M \rangle_\infty, \infty)$) 仍然成立. DDS 定理说明: 连续局部鞅都是时间变换后的布朗运动, 这解释了布朗运动在连续鞅理论中的中心地位。

推论 12.16

设 M 为连续局部鞅, $\langle M \rangle_\infty = \infty$ a.s. 则 a.s. $\limsup_t M_t = +\infty$, $\liminf_t M_t = -\infty$, 且 (重对数律, 定理 9.23) $\limsup_{t \rightarrow \infty} M_t / \sqrt{2\langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t} = 1$ 。

证明 $M_t = M_0 + \beta_{\langle M \rangle_t}$, $\langle M \rangle_t \rightarrow \infty$ 且连续, 对布朗运动 β 用推论 9.17 与定理 9.23。

12.5 Burkholder–Davis–Gundy 不等式

对过程 X 记 $X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s|$, $X_\infty^* = \sup_s |X_s|$ 。

引理 12.17 (Lenglart 型控制 [13])

设 X 是非负、连续、适应的过程, A 是连续增过程 ($A_0 = 0$), 且对每个有界停时 T , $\mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[A_T]$. 则对 $x > 0$, $\mathbb{P}(X_\infty^* > x) \leq \frac{1}{x} \mathbb{E}[A_\infty \wedge x] + \mathbb{P}(A_\infty \geq x)$; 并且对 $q \in (0, 1)$,

$$\mathbb{E}[(X_\infty^*)^q] \leq \frac{2-q}{1-q} \mathbb{E}[A_\infty^q].$$

证明 令 $R = \inf\{t : A_t \geq x\}$, $S = \inf\{t : X_t \geq x\}$, 对 $n \in \mathbb{N}$ 令 $T = S \wedge R \wedge n$. 在 $\{S \leq R \wedge n\}$ 上 $X_T \geq x$ (路径连续), 而 $A_T \leq A_\infty \wedge x$. 故 $x\mathbb{P}(S \leq R \wedge n) \leq \mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[A_T] \leq \mathbb{E}[A_\infty \wedge x]$. 令 $n \rightarrow \infty$: $x\mathbb{P}(S < \infty, S \leq R) \leq \mathbb{E}[A_\infty \wedge x]$. 而 $\{X_\infty^* > x, A_\infty < x\} \subset \{S < \infty, R = \infty\}$. 这证明了第一个不等式. 于是

$$\mathbb{E}[(X_\infty^*)^q] = \int_0^\infty qx^{q-1} \mathbb{P}(X_\infty^* > x) dx \leq \mathbb{E}\left[\int_0^\infty qx^{q-2}(A_\infty \wedge x) dx\right] + \mathbb{E}[A_\infty^q],$$

而 $\int_0^\infty qx^{q-2}(a \wedge x) dx = a^q + a \cdot \frac{q}{1-q} a^{q-1} = \frac{a^q}{1-q}$ 。

定理 12.18 (Burkholder–Davis–Gundy)

对每个 $p > 0$, 存在常数 $0 < c_p \leq C_p < \infty$, 使得对一切满足 $M_0 = 0$ 的连续局部鞅 M 及停时 T ,

$$c_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{p/2}] \leq \mathbb{E}[(M_T^*)^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{p/2}].$$

证明 把 M 换成 M^T , 只需对 $T = \infty$ 证明. 令 $T_n = \inf\{t : |M_t| + \langle M \rangle_t \geq n\}$; 若对 M^{T_n} 证明了不等式, 令 $n \rightarrow \infty$ 用单调收敛即可. 因此可设 M 与 $\langle M \rangle$ 有界, 此时 M 是 $\mathbb{H}^2$ 中的有界鞅, 所有量有限, 且对每个有界停时 S , $\mathbb{E}[M_S^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_S]$ (命题 11.7(2) 与可选停止)。

$0 < p < 2$. 把引理 12.17 用于 $X = M^2$, $A = \langle M \rangle$, $q = p/2$: $\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq \frac{2-q}{1-q} \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{p/2}]$. 再用于 $X = \langle M \rangle$, $A = (M^*)^2$ ($\mathbb{E}[\langle M \rangle_s] = \mathbb{E}[M_s^2] \leq \mathbb{E}[(M_s^*)^2]$): $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{p/2}] \leq \frac{2-q}{1-q} \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p]$.

$p = 2$. $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty] = \mathbb{E}[M_\infty^2] \leq \mathbb{E}[(M_\infty^*)^2] \leq 4\mathbb{E}[M_\infty^2]$ (Doob).

$p > 2$, 上界. 对 $x \mapsto |x|^p$ (C^2) 用 Itô 公式: $|M_t|^p = \int_0^t p|M_s|^{p-1} \operatorname{sgn}(M_s) dM_s + \frac{p(p-1)}{2} \int_0^t |M_s|^{p-2} d\langle M \rangle_s$; 随机积分的被积函数有界, 是 $\mathbb{H}^2$ 中的鞅, 期望为 0. 由 Hölder 不等式 (指数 $\frac{p}{p-2}$ 与 $\frac{p}{2}$),

$$\mathbb{E}|M_\infty|^p \leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}[(M_\infty^*)^{p-2} \langle M \rangle_\infty] \leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E}[(M_\infty^*)^{p-2}]^{1-2/p} \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{p/2}]^{2/p}.$$

由 Doob 不等式 $\mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}|M_\infty|^p$, 代入并除以 $\mathbb{E}[(M_\infty^*)^{p-2}]^{1-2/p}$ (若为 0 无需证明) 得上界.

$p > 2$, 下界. 由 (12.2), $\langle M \rangle_\infty = M_\infty^2 - 2N_\infty$, $N = M \cdot M$, $\langle N \rangle = M^2 \cdot \langle M \rangle \leq (M_\infty^*)^2 \langle M \rangle_\infty$. 由已证的上界 (指数 $p/2 > 1$: 若 $p/2 \leq 2$ 用前两种情形, 若 $p/2 > 2$ 用上一段) 与 Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}[|N_\infty|^{p/2}] \leq C \mathbb{E}[\langle N \rangle_\infty^{p/4}] \leq C \mathbb{E}[(M_\infty^*)^{p/2} \langle M \rangle_\infty^{p/4}] \leq C \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p]^{1/2} \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{p/2}]^{1/2}.$$

于是 $u = \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{p/2}]$, $v = \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p]$ 满足 $u \leq C'(v + \sqrt{uv})$, 解此二次不等式得 $u \leq C''v$.

推论 12.19

若 M 是连续局部鞅, $M_0 = 0$, $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty^{1/2}] < \infty$, 则 M 是一致可积鞅. 特别地, 若 H 循序可测且 $\mathbb{E}[(\int_0^t H_s^2 ds)^{1/2}] < \infty$, 则 $(\int_0^s H_u dB_u)_{s \leq t}$ 是鞅.

证明 由 BDG, $M_\infty^* \in L^1$, 用命题 11.4(5).

12.6 布朗滤子中的鞅表示

本节中 B 是 d 维布朗运动, $(\mathcal{F}_t)$ 是其自然滤子的完备化 (由定理 9.16 后的讨论, 它满足通常条件, B 是 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动). 对 $\mathbb{R}^d$ 值循序可测 h , $\int h \cdot dB := \sum_j \int h^j dB^j$.

定理 12.20 (鞅表示定理)

对每个 $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, 存在唯一的 $\mathbb{R}^d$ 值循序可测过程 h , $\mathbb{E} \int_0^\infty |h_s|^2 ds < \infty$, 使

$$Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^\infty h_s \cdot dB_s.$$

证明 唯一性由等距性. 令 $\mathcal{R}$ 为可以如此表示的 Z 全体. 由等距性 $\mathbb{E}[(\int_0^\infty h \cdot dB)^2] = \mathbb{E} \int_0^\infty |h|^2 ds$, $\mathcal{R}$ 是 L^2 的闭子空间.

设 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为有界阶梯函数, 在某个 $[0, T]$ 之外为 0. 令 $Z_t^f = \exp(i \int_0^t f \cdot dB + \frac{1}{2} \int_0^t |f|^2 ds)$. 由 Itô 公式 (对实部与虚部), $Z_t^f = 1 + i \int_0^t Z_s^f f(s) \cdot dB_s$, 被积函数有界 ($|Z^f| \leq e^{\frac{1}{2} \int |f|^2}$). 因此 Z_∞^f 的实部与虚部属于 $\mathcal{R}$, 从而 $\cos(\int f \cdot dB)$ 与 $\sin(\int f \cdot dB)$ 也属于 $\mathcal{R}$ (乘以常数).

设 $Y \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ 与 $\mathcal{R}$ 正交. 对 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 与 $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$, 取 $f = \sum_k \xi_k \mathbf{1}_{(t_{k-1}, t_k]}$, 得 $\mathbb{E}[Y e^{i \sum_k \langle \xi_k, B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \rangle}] = 0$. 令 ν 为 $(\mathbb{R}^d)^n$ 上的有限符号测度 $\nu(C) = \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_C(B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})]$, 则 $\hat{\nu} \equiv 0$; 写 $\nu = \nu^+ - \nu^-$, 则 $\nu^\pm$ 总质量相同且特征函数相同, 由定理 2.11 $\nu = 0$. 于是 $\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_A] = 0$ 对一切 $A \in \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ 成立; 这些 σ -代数之并是生成 $\sigma(B_t, t \geq 0)$ 的 π -系, 由 λ -系论证 $\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_A] = 0$ 对 $A \in \sigma(B_t, t \geq 0)$ 成立, 从而对其完备化 $\mathcal{F}_\infty$ 成立, $Y = 0$. 所以 $\mathcal{R} = L^2(\mathcal{F}_\infty)$ (常数显然属于 $\mathcal{R}$).

推论 12.21

布朗滤子中的每个鞅都有连续修正. 每个连续局部鞅 M 都可写成 $M_t = M_0 + \int_0^t h_s \cdot dB_s$, 其中 h 循序可测, $\int_0^t |h_s|^2 ds < \infty$ a.s., 且 M_0 为常数.

证明 设 M 是鞅 (取其 càdlàg 修正, 定理 10.11), $T > 0$. 若 $M_T \in L^2$, 则由定理 12.20, $M_t = \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}M_T + \int_0^t h \cdot dB$ ($t \leq T$) 是连续的. 一般地取 $Z_n \in L^2$, $Z_n \rightarrow M_T$ 于 L^1 , $M_t^n = \mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_t]$ 连续; 由 Doob 最

大不等式, $\mathbb{P}(\sup_{t \leq T} |M_t^n - M_t| > \varepsilon) \leq \mathbb{E}|Z_n - M_T|/\varepsilon \rightarrow 0$, 取子列 a.s. 一致收敛, 故 M 在 $[0, T]$ 上连续。对局部鞅 M , $\mathcal{F}_0$ 是平凡的 (Blumenthal), M_0 是常数; 以 T_n 约化使 $M^{T_n} - M_0$ 有界, $M^{T_n} - M_0 = \int h^{(n)} \cdot dB$, 由唯一性 $h^{(n+1)} = h^{(n)}$ 于 $[0, T_n]$, 粘合即得。

12.7 Girsanov 定理

定理 12.22 (Girsanov)

设 $\mathbb{Q}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上与 $\mathbb{P}$ 在 $\mathcal{F}_\infty$ 上等价的概率测度, 鞅 $D_t = \mathbb{E}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t]$ 有连续修正 (在布朗滤子中这总是成立的, 推论 12.21)。则 $D_t > 0$ 对一切 t a.s. 成立, 存在唯一的连续局部鞅 L 使 $D = \mathcal{E}(L) = \exp(L - \frac{1}{2}\langle L \rangle)$, 并且: 若 M 是 $\mathbb{P}$ -连续局部鞅, 则 $\tilde{M} = M - \langle M, L \rangle$ 是 $\mathbb{Q}$ -连续局部鞅。此外 $\langle \tilde{M} \rangle$ 在 $\mathbb{Q}$ 下等于 $\langle M \rangle$ 。

证明 D 是一致可积 $\mathbb{P}$ -鞅, $D_\infty = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0$ a.s., 且对任何停时 T , $D_T = \mathbb{E}[D_\infty | \mathcal{F}_T]$ 。令 $S = \inf\{t : D_t = 0\}$, 则 $\mathbb{E}[D_\infty \mathbf{1}_{\{S < \infty\}}] = \mathbb{E}[D_S \mathbf{1}_{\{S < \infty\}}] = 0$, 故 $\mathbb{P}(S < \infty) = 0$ 。由 Itô 公式 (对 $\log$ 在 $(0, \infty)$ 上, 停止于 D 离开 $[1/n, n]$ 的时刻), $L_t = \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1} dD_s$ 满足 $\log D_t = L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t$ 。唯一性: 若 $\mathcal{E}(L) = \mathcal{E}(L')$, 则 $L - L' = \frac{1}{2}(\langle L \rangle - \langle L' \rangle)$ 是有限变差的局部鞅。

引理: 若 X 连续适应, XD 是 $\mathbb{P}$ -连续局部鞅, 则 X 是 $\mathbb{Q}$ -连续局部鞅。证明: 取 $T_n \uparrow \infty$ 使 $(XD)^{T_n}$ 有界, 并令 $R_n = T_n \wedge n$ 。对有界停时 T , $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_{T \wedge R_n}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_{T \wedge R_n} X_{T \wedge R_n}] < \infty$, 且

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_{T \wedge R_n}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_\infty X_{T \wedge R_n}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_{T \wedge R_n} X_{T \wedge R_n}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_0 X_0] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_0].$$

由引理 12.3 (在 $\mathbb{Q}$ 下), X^{R_n} 是 $\mathbb{Q}$ -鞅, 它在 n 之后为常数, 故一致可积。 $\mathbb{Q}$ 下滤子仍满足通常条件 (零集相同), $R_n \uparrow \infty$ $\mathbb{Q}$ -a.s.。

由分部积分 (12.2) 与 $D = D_0 + D \cdot L$,

$$\tilde{M}_t D_t = \tilde{M}_0 D_0 + \int_0^t \tilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s - \int_0^t D_s d\langle M, L \rangle_s + \langle M, D \rangle_t,$$

而 $\langle M, D \rangle = D \cdot \langle M, L \rangle$, 故 $\tilde{M}D$ 是 $\mathbb{P}$ -局部鞅, 由引理即得。最后, $\langle \tilde{M} \rangle_t$ 是 $\sum (\Delta_i \tilde{M})^2$ 的依概率极限, 而依概率收敛在等价测度下保持; $\tilde{M}$ 与 M 只差有限变差过程, 故其平方和的极限都是 $\langle M \rangle_t$ 。

推论 12.23

在定理 12.22 的条件下, 若 B 是 d 维 $(\mathcal{F}_t)$ - $\mathbb{P}$ -布朗运动, 则 $\tilde{B} = B - \langle B, L \rangle$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ - $\mathbb{Q}$ -布朗运动。特别地, 若 $L = \int_0^t b_s \cdot dB_s$, 则 $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t b_s ds$ 。

证明 $\tilde{B}^j$ 是 $\mathbb{Q}$ -连续局部鞅, $\langle \tilde{B}^i, \tilde{B}^j \rangle = \langle B^i, B^j \rangle = \delta_{ij}t$, 由 Lévy 定理 (在 $\mathbb{Q}$ 下)。 $\langle B^j, L \rangle = \int b^j ds$ 。

实际应用中常常反过来: 给定连续局部鞅 L ($L_0 = 0$), 若 $\mathcal{E}(L)$ 是一致可积鞅, 则 $d\mathbb{Q} = \mathcal{E}(L)_\infty d\mathbb{P}$ 定义了等价概率测度, 定理 12.22 适用 ($D = \mathcal{E}(L)$ 连续)。下面的判别法保证了这一点。

定理 12.24 (Novikov 判别法)

设 L 为连续局部鞅, $L_0 = 0$, $\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}\langle L \rangle_\infty)] < \infty$ 。则 $\mathcal{E}(L)$ 是一致可积鞅。

证明 $\langle L \rangle_\infty < \infty$ a.s., 故 L_∞ 存在 (命题 11.7(5))。 $\mathcal{E}(L)$ 是非负上鞅 (指数鞅的例子), 由定理 10.15, $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_T] \leq 1$ 对一切停时 T 成立。由 Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}[e^{L_T/2}] = \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_T^{1/2} e^{\langle L \rangle_T/4}] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_T]^{1/2} \mathbb{E}[e^{\langle L \rangle_\infty/2}]^{1/2} \leq C.$$

固定 $a \in (0, 1)$ 。对停时 T 与事件 A , 写 $\mathcal{E}(aL)_T = \mathcal{E}(L)_T^a \exp(\frac{a}{1+a}L_T)^{1-a^2}$, 由 Hölder 不等式 (指数 $1/a^2$ 与 $1/(1-a^2)$) 及 Jensen 不等式 ($\frac{2a}{1+a} < 1$),

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(aL)_T \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_T]^a \mathbb{E}[\mathbf{1}_A e^{\frac{a}{1+a}L_T}]^{1-a^2} \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_A e^{L_T/2}]^{2a(1-a)} \mathbb{P}(A)^{(1-a)^2} \leq C^{2a(1-a)} \mathbb{P}(A)^{(1-a)^2}.$$

因此族 $\{\mathcal{E}(aL)_T : T \text{ 为停时}\}$ 一致可积 (命题 4.4(3))。以 (T_n) 约化局部鞅 $\mathcal{E}(aL)$, 对 $s < t$ 在 $\mathcal{E}(aL)_{s \wedge T_n} =$

$\mathbb{E}[\mathcal{E}(aL)_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s]$ 中令 $n \rightarrow \infty$ (Vitali), 知 $\mathcal{E}(aL)$ 是一致可积鞅, $\mathbb{E}[\mathcal{E}(aL)_\infty] = 1$ 。再用一次上面的 Hölder 估计 ($T = \infty$, $A = \Omega$):

$$1 = \mathbb{E}[\mathcal{E}(aL)_\infty] \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2} \mathbb{E}[e^{L_\infty/2}]^{2a(1-a)}.$$

令 $a \uparrow 1$ 得 $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] \geq 1$ 。非负上鞅 $\mathcal{E}(L)$ 满足 $\mathcal{E}(L)_t \geq \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty | \mathcal{F}_t]$, 两边期望都是 1, 故 $\mathcal{E}(L)_t = \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty | \mathcal{F}_t]$, 是一致可积鞅。

例 12.2 (Cameron–Martin) 设 $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $h(t) = \int_0^t g(s)ds$, B 为一维布朗运动。 $L = \int g dB$ 满足 $\langle L \rangle_\infty = \int g^2 < \infty$ (确定性), 由 Novikov 判别法, $d\mathbb{Q} = \exp(\int_0^\infty g dB - \frac{1}{2} \int_0^\infty g^2 ds) d\mathbb{P}$ 是概率测度, 在 $\mathbb{Q}$ 下 $B - h$ 是布朗运动。等价地: 对 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 上的非负可测 Φ ,

$$\mathbb{E}[\Phi(B + h)] = \mathbb{E}\left[\Phi(B) \exp\left(\int_0^\infty g dB - \frac{1}{2} \int_0^\infty g^2 ds\right)\right].$$

(在 $\mathbb{Q}$ 下 $B = (B - h) + h$ 与 $\mathbb{P}$ 下的 $B + h$ 同分布。)

例 12.3 (带漂移布朗运动的首中时) 设 B 为一维布朗运动, $\mu \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $T_a^{(\mu)} = \inf\{t : B_t + \mu t = a\}$ 。则 $T_a^{(\mu)}$ 在 $(0, \infty)$ 上有 (亚概率) 密度

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{(a - \mu s)^2}{2s}\right), \quad \text{且} \quad \mathbb{P}(T_a^{(\mu)} < \infty) = \begin{cases} 1, & \mu \geq 0, \\ e^{2\mu a}, & \mu < 0. \end{cases}$$

证明: 固定 $t > 0$, 由例 12.2 (取 $g = \mu \mathbf{1}_{[0,t]}$), 在 $d\mathbb{Q} = e^{\mu B_t - \mu^2 t/2} d\mathbb{P}$ 下, $(B_s - \mu s)_{s \leq t}$ 是布朗运动; 等价地, $(B_s + \mu s)_{s \leq t}$ 在 $\mathbb{P}$ 下的分布等于 $(B_s)_{s \leq t}$ 在 $\mathbb{Q}$ 下的分布。因此

$$\mathbb{P}(T_a^{(\mu)} \leq t) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} e^{\mu B_t - \mu^2 t/2}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} e^{\mu B_{T_a} - \mu^2 T_a/2}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_a \leq t\}} e^{\mu a - \mu^2 T_a/2}],$$

其中第二个等号是对鞅 $e^{\mu B_s - \mu^2 s/2}$ 在有界停时 $T_a \wedge t \leq t$ 处用可选停止定理 ($\{T_a \leq t\} \in \mathcal{F}_{T_a \wedge t}$)。代入定理 9.21 中 T_a 的密度即得; 令 $t \rightarrow \infty$, 用 $\mathbb{E}[e^{-\lambda T_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$ ($\lambda = \mu^2/2$) 得 $\mathbb{P}(T_a^{(\mu)} < \infty) = e^{\mu a - |\mu|a}$ 。

第 13 章 马尔可夫过程的一般理论

本章把第 7 章的马氏链推广到连续时间、一般状态空间。我们引入转移半群、Feller 半群及其生成元，证明 Feller 过程有 càdlàg 修正并具有强马氏性，最后讨论有限状态跳过程与 Lévy 过程。

本章中 E 是局部紧、可分、可度量化空间（因而是 Polish 空间）， $\mathcal{B}(E)$ 为其 Borel σ -代数。 $C_0(E)$ 表示在无穷远处趋于 0 的连续函数空间，配一致范数 $\|\cdot\|$ ； $B(E)$ 表示有界可测函数。若 E 不紧， $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ 为单点紧化（紧可度量化）， $C_0(E)$ 中的函数通过 $f(\Delta) = 0$ 延拓为 E_Δ 上的连续函数，且 $C(E_\Delta) = C_0(E) \oplus \mathbb{R}$ ；若 E 紧，令 Δ 为添加的孤立点。

13.1 转移半群与马氏过程

定义 13.1

E 上的转移半群是一族从 E 到 E 的转移核 $(Q_t)_{t \geq 0}$ （第 5 章），满足：(i) $Q_0(x, \cdot) = \delta_x$ ；(ii) (Chapman–Kolmogorov) $Q_{t+s} = Q_t Q_s$ ，即 $Q_{t+s}(x, A) = \int Q_t(x, dy) Q_s(y, A)$ ；(iii) $(t, x) \mapsto Q_t(x, A)$ 关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(E)$ 可测。对 $f \in B(E)$ 记 $Q_t f(x) = \int Q_t(x, dy) f(y)$ 。



定义 13.2

设 $(\mathcal{F}_t)$ 为滤子。取值于 E 的适应过程 X 称为以 (Q_t) 为转移半群的马氏过程，若对一切 $s, t \geq 0$ 与 $f \in B(E)$ ，

$$\mathbb{E}[f(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = Q_t f(X_s) \quad \text{a.s.}$$



与命题 7.3 的证明相同，若 $X_0 \sim \gamma$ ，则对 $0 < t_1 < \cdots < t_n$ ，

$$\mathbb{E}[f_0(X_0) f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})] = \int \gamma(dx_0) f_0(x_0) \int Q_{t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \cdots \int Q_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n). \quad (13.1)$$

命题 13.3

对 E 上任一概率测度 γ ，存在以 γ 为初始分布、 (Q_t) 为转移半群的马氏过程（关于其自然滤子）。



证明 由 (13.1) 定义有限维分布（对于含 0 与不含 0 的时刻集合分别对 x_0 积分或不积分）。由 Chapman–Kolmogorov 方程，这些分布相容。由 Kolmogorov 扩张定理 3.11 得到 $E^{\mathbb{R}_+}$ 上的测度，坐标过程满足 (13.1)，于是由与命题 7.3(2) 相同的论证，它是马氏过程。

定义 13.4

对 $\lambda > 0$ ，预解算子 $R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f(x) dt$ ， $f \in B(E)$ 。



$\|\lambda R_\lambda f\| \leq \|f\|$ ，且有预解方程： $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$ 。由 Fubini 与半群性质，

$$R_\lambda R_\mu f = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s - \mu t} Q_{s+t} f ds dt,$$

作变量替换 $u = s + t$ 即得。

注 若允许 $Q_t(x, E) \leq 1$ （次马氏半群），可添加墓碑点 Δ ，令 $Q_t(x, \{\Delta\}) = 1 - Q_t(x, E)$ ， $Q_t(\Delta, \cdot) = \delta_\Delta$ ，化为 E_Δ 上的马氏半群。以下为简单起见只讨论 $Q_t(x, E) = 1$ 的情形。

13.2 Feller 半群与生成元

定义 13.5

转移半群 (Q_t) 称为 *Feller 半群*, 若: (i) 对一切 $f \in C_0(E)$ 与 $t \geq 0$, $Q_t f \in C_0(E)$; (ii) 对一切 $f \in C_0(E)$, $\|Q_t f - f\| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$)。以 Feller 半群为转移半群的马氏过程称为 *Feller 过程*。

由 (ii) 与 $\|Q_t\| \leq 1$, $t \mapsto Q_t f$ 是从 $\mathbb{R}_+$ 到 $C_0(E)$ 的一致连续映射: $\|Q_{t+h} f - Q_t f\| \leq \|Q_h f - f\|$ 。

定义 13.6

Feller 半群的生成元 L 定义在

$$D(L) = \left\{ f \in C_0(E) : \frac{Q_t f - f}{t} \text{ 当 } t \downarrow 0 \text{ 时在 } C_0(E) \text{ 中收敛} \right\}$$

上, Lf 为该极限。

命题 13.7

设 (Q_t) 为 Feller 半群, L 为其生成元, $\lambda > 0$ 。

1. 若 $f \in D(L)$, 则 $Q_t f \in D(L)$, $LQ_t f = Q_t Lf$, 且 $Q_t f = f + \int_0^t Q_s Lf ds$ (在 $C_0(E)$ 中的 Riemann 积分)。
2. R_λ 把 $C_0(E)$ 映到 $D(L)$, 且 $(\lambda - L)R_\lambda f = f$ ($f \in C_0$), $R_\lambda(\lambda - L)f = f$ ($f \in D(L)$)。因此 $D(L) = R_\lambda(C_0(E))$ 在 $C_0(E)$ 中稠密, 且 $\lambda - L : D(L) \rightarrow C_0(E)$ 是双射。
3. 生成元决定半群: 若两个 Feller 半群有相同的生成元, 则它们相等。

证明 (1) $\frac{1}{h}(Q_h Q_t f - Q_t f) = Q_t \frac{1}{h}(Q_h f - f) \rightarrow Q_t Lf$ 。于是 $t \mapsto Q_t f$ 在 C_0 中右可导, 右导数 $Q_t Lf$ 连续; 左导数: $\frac{1}{h}(Q_t f - Q_{t-h} f) - Q_t Lf = Q_{t-h}(\frac{Q_h f - f}{h} - Lf) + (Q_{t-h} Lf - Q_t Lf) \rightarrow 0$ 。故 $t \mapsto Q_t f$ 在 C_0 中 C^1 , 由微积分基本定理 (逐点应用) 得积分公式。

(2) $R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f dt$ 也可理解为 C_0 中的 (广义) Riemann 积分, 故 $R_\lambda f \in C_0$ 。计算

$$\frac{Q_h R_\lambda f - R_\lambda f}{h} = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} Q_t f dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} Q_t f dt \rightarrow \lambda R_\lambda f - f.$$

若 $f \in D(L)$, 由 (1), $R_\lambda Lf = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} Q_t f dt = -f + \lambda R_\lambda f$ (分部积分)。稠密性: $\lambda R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-s} Q_{s/\lambda} f ds \rightarrow f$ ($\lambda \rightarrow \infty$, 控制收敛)。

(3) 若 $(Q_t), (Q'_t)$ 有相同生成元, 由 (2), $R_\lambda = (\lambda - L)^{-1} = R'_\lambda$ 。对 $f \in C_0, x \in E$, 有界连续函数 $t \mapsto Q_t f(x)$ 与 $Q'_t f(x)$ 的 Laplace 变换相同, 由命题 2.14(3) 二者相等。 C_0 中的函数决定有限测度 (命题 1.14 与引理 4.9 的论证), 故 $Q_t(x, \cdot) = Q'_t(x, \cdot)$ 。

注 [Hille-Yosida] 线性算子 L (定义在稠密子空间上) 是某个 Feller 半群的生成元, 当且仅当: L 满足正最大值原理 (若 $f \in D(L)$ 在 x_0 处取到非负最大值, 则 $Lf(x_0) \leq 0$), 且对某个 $\lambda > 0$, $\lambda - L$ 是满射。本讲义只使用上面已证明的部分 (生成元决定半群), 不使用存在性部分。

命题 13.8 (Dynkin 鞅)

设 X 是以 Feller 半群 (Q_t) 为转移半群的 $(\mathcal{F}_t)$ -马氏过程, $f \in D(L)$ 。则 $M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ -鞅 (只要 $s \mapsto Lf(X_s)$ 循序可测, 例如 X 路径右连续)。

证明 M_t 有界。对 $s < t$, 由马氏性与 Fubini, $\mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = Q_{t-s} f(X_s) - f(X_s) - \int_s^t Q_{u-s} Lf(X_s) du = 0$ (命题 13.7(1))。

例 13.1 (布朗运动) d 维布朗运动的半群 $Q_t f(x) = \int p_t(y-x) f(y) dy = \mathbb{E}[f(x+B_t)]$ 是 Feller 半群: $Q_t f$ 连续且在无穷远处趋于 0 (控制收敛), $\|Q_t f - f\| \leq \mathbb{E}[\sup_x |f(x+B_t) - f(x)|] \rightarrow 0$ (f 一致连续)。若 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, 则 $f \in D(L)$, $Lf = \frac{1}{2} \Delta f$: 由 Itô 公式与命题 12.5, $Q_t f(x) - f(x) = \frac{1}{2} \int_0^t Q_s \Delta f(x) ds$, 故 $\|\frac{1}{t}(Q_t f - f) - \frac{1}{2} \Delta f\| \leq$

$$\sup_{s \leq t} \|Q_s \Delta f - \Delta f\|/2 \rightarrow 0.$$

13.3 路径的正则性

引理 13.9

设 Z 是路径 càdlàg 的非负上鞅 (滤子满足通常条件), $T = \inf\{t : Z_t = 0 \text{ 或 } Z_{t-} = 0\}$. 则 a.s. 对一切 $t \geq T$, $Z_t = 0$.

证明 令 $T_n = \inf\{t : Z_t < 1/n\}$ (开集的首中时, 命题 10.7), $S = \lim \uparrow T_n$. 在 $\{T_n < \infty\}$ 上 $Z_{T_n} \leq 1/n$. 对有理数 $q \geq 0$, 由定理 10.15 ($T_n \leq S + q$), $\mathbb{E}[Z_{S+q} \mathbf{1}_{\{S < \infty\}}] \leq \mathbb{E}[Z_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n < \infty\}}] \leq 1/n$. 故 a.s. 在 $\{S < \infty\}$ 上 $Z_{S+q} = 0$ 对一切有理 $q \geq 0$, 由右连续性 $Z_t = 0$ 对一切 $t \geq S$. 若 $Z_t = 0$ 或 $Z_{t-} = 0$, 则对每个 n 有 $T_n \leq t$, 故 $S \leq T$; 又 $Z_S = 0$, 故 $T \leq S$.

定理 13.10 (Feller 过程的正则化)

设 X 是以 Feller 半群 (Q_t) 为转移半群的 $(\mathcal{F}_t)$ -马氏过程, $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ 的通常增广. 则 X 有一个修正 $\tilde{X}$, 其路径在 E 中 càdlàg, 且 $\tilde{X}$ 是以 (Q_t) 为转移半群的 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -马氏过程.

证明 第一步: 可分离点的上鞅族. 取 $C_0(E)$ 中非负函数的可数稠密子集 $\{f_n\}$ ($C_0(E)$ 可分). 对 $p \in \mathbb{N}^*$, $pR_p f_n \rightarrow f_n$ 一致 (命题 13.7(2) 的证明), 故函数族 $\mathcal{R} = \{R_p f_n\}$ 分离 E_Δ 的点 ($C_0(E)$ 分离 E_Δ 的点). 对 $g = R_p f$ ($f \geq 0$), $e^{-pt}g(X_t)$ 是非负 $(\mathcal{F}_t)$ -上鞅: $\mathbb{E}[e^{-p(t+s)}g(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = e^{-p(t+s)}Q_s R_p f(X_t) = e^{-pt} \int_s^\infty e^{-pu} Q_u f(X_t) du \leq e^{-pt}g(X_t)$.

第二步: 沿二进制点的极限. 令 D 为非负二进制有理数. 由离散上鞅的上穿不等式与最大不等式 (如定理 10.11 的证明), a.s. 对每个 $g \in \mathcal{R}$ 与每个 t , $\lim_{s \downarrow t, s \in D} g(X_s)$ 与 $\lim_{s \uparrow t, s \in D} g(X_s)$ 存在. 由于 E_Δ 紧可度量化而 $\mathcal{R}$ 是分离点的可数连续函数族, 一个序列只要使 $\mathcal{R}$ 中每个函数的值都收敛, 它就在 E_Δ 中收敛 (其所有聚点在 $\mathcal{R}$ 下有相同的像). 因此在一个零集 N 之外, $\tilde{X}_t := \lim_{s \downarrow t, s \in D} X_s$ 在 E_Δ 中存在, 且 $\tilde{X}$ 在 E_Δ 中 càdlàg; 在 N 上令 $\tilde{X}_t = x_0 \in E$. $\tilde{X}_t$ 是 $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -可测的.

第三步: 修正. 对 $f, g \in C(E_\Delta)$, 取 $s_n \in D$, $s_n \downarrow t$. 由控制收敛与 Feller 性质 ($C(E_\Delta) = C_0(E) \oplus \mathbb{R}$, 常数部分平凡),

$$\mathbb{E}[f(X_t)g(\tilde{X}_t)] = \lim_n \mathbb{E}[f(X_t)g(X_{s_n})] = \lim_n \mathbb{E}[f(X_t)Q_{s_n-t}g(X_t)] = \mathbb{E}[f(X_t)g(X_t)].$$

对闭集 $F, F' \subset E_\Delta$, 用 $f_k \downarrow \mathbf{1}_F$, $g_k \downarrow \mathbf{1}_{F'}$ (如命题 1.14 的证明), 得 $\mathbb{P}(X_t \in F, \tilde{X}_t \in F') = \mathbb{P}(X_t \in F \cap F')$. 闭矩形构成生成 $\mathcal{B}(E_\Delta \times E_\Delta)$ 的 π -系 (引理 1.4), 故 $(X_t, \tilde{X}_t) \stackrel{(d)}{=} (X_t, X_t)$, 于是 $\mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1$. 特别地 $\tilde{X}_t \in E$ a.s.

第四步: 马氏性. 对 $f \in C_0(E)$, $s > 0$, $A \in \mathcal{F}_{t+}$, 取 $\varepsilon_n \downarrow 0$ 使 $t + \varepsilon_n \in D$, $\varepsilon_n < s$. 由 $A \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon_n}$ 与马氏性, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A f(\tilde{X}_{t+s})] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A f(X_{t+s})] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Q_{s-\varepsilon_n} f(X_{t+\varepsilon_n})] \rightarrow \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Q_s f(\tilde{X}_t)]$ ($Q_{s-\varepsilon_n} f \rightarrow Q_s f$ 一致, $Q_s f$ 连续, $X_{t+\varepsilon_n} \rightarrow \tilde{X}_t$). 添加零集不影响这个等式. 由单调类论证, 它对一切 $f \in B(E)$ 成立. 故 $\tilde{X}$ 是 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -马氏过程 (在 $\tilde{X}$ 取值于 Δ 的零集上的定义无关紧要).

第五步: 路径不碰到 Δ . 取 $h \in C_0(E)$ 处处为正 (E 是局部紧可分度量空间, 故是可数个开集 U_n 之并, 每个 U_n 有紧闭包; 令 $\phi_n(x) = d(x, U_n^c)/(1 + d(x, U_n^c)) \in C_c(E)$, $h = \sum_n 2^{-n} \phi_n$), 则 $R_1 h > 0$ 于 E , $R_1 h(\Delta) = 0$, 且 $Z_t = e^{-t} R_1 h(\tilde{X}_t)$ 是 càdlàg 非负 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -上鞅 (第一步与第四步). 对每个 t , $\tilde{X}_t \in E$ a.s., 故 $Z_t > 0$ a.s.. 由引理 13.9, $\{T \leq k\} \subset \{Z_k = 0\}$ 是零集, 故 $T = \infty$ a.s., 即 a.s. 对一切 t , $\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t-} \in E$. 所以 $\tilde{X}$ 在 E 中 càdlàg (修改一个零集).

由此, 对每个 $x \in E$, 存在从 x 出发、路径 càdlàg 的 Feller 过程. 令 $\mathbb{D}(E)$ 为 $\mathbb{R}_+ \rightarrow E$ 的 càdlàg 函数空间, 配以坐标映射生成的 σ -代数; 我们记 $\mathbb{P}_x$ 为该过程在 $\mathbb{D}(E)$ 上的分布 (由 (13.1) 唯一决定), $\mathbb{E}_x$ 为相应期望. 由 (13.1) 与单调类定理, 对 $\mathbb{D}(E)$ 上的有界可测 Φ , $x \mapsto \mathbb{E}_x[\Phi]$ 是可测的.

13.4 强马氏性

定理 13.11 (Feller 过程的强马氏性)

设 X 是路径 càdlàg 的 Feller 过程 (关于满足通常条件的滤子 $(\mathcal{F}_t)$), T 为停时, $\Phi: \mathbb{D}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 可测。则

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \Phi((X_{T+t})_{t \geq 0}) | \mathcal{F}_T] = \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \mathbb{E}_{X_T}[\Phi] \quad \text{a.s.}$$



证明 先设 $\Phi(w) = \prod_{i=1}^k f_i(w(t_i))$, $f_i \in C_0(E)$, $0 \leq t_1 < \dots < t_k$ 。令

$$F(x) = \mathbb{E}_x[\Phi] = Q_{t_1}(f_1 Q_{t_2-t_1}(f_2 \cdots Q_{t_k-t_{k-1}} f_k))(x),$$

由 Feller 性质 $F \in C_0(E)$ (若 $t_1 = 0$, $Q_0 = \text{id}$)。设 T_n 为 T 的二进制逼近 (命题 10.5(4)), $A \in \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T_n}$ 。由马氏性 (在确定时刻 $k2^{-n}$, 形式 (13.1) 的条件版本),

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} \Phi(X_{T_n+\cdot})] = \sum_k \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A \cap \{T_n = k2^{-n}\}} F(X_{k2^{-n}})] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} F(X_{T_n})].$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由路径右连续与 f_i, F 的连续性, 控制收敛给出 $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} \Phi(X_{T+\cdot})] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A \cap \{T < \infty\}} F(X_T)]$; $X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}$ 是 $\mathcal{F}_T$ -可测的。紧集 K 的示性函数是 C_0 函数 $(1 - kd(\cdot, K))^+$ (k 充分大) 的递减极限, 常数 1 是 C_0 函数 $\min(1, kh)$ 的递增极限 ($h \in C_0$ 处处为正, 见定理 13.10 证明的第五步)。由单调收敛与控制收敛, 等式对 $\Phi = \prod_i \mathbf{1}_{K_i}(w(t_i))$ 成立, 其中每个 K_i 是紧集或 $K_i = E$ 。由于 E 是可数个紧集之并, 紧集生成 $\mathcal{B}(E)$, 这样的集合 $\{w: w(t_i) \in K_i, i \leq k\}$ 构成生成 $\mathbb{D}(E)$ 上 σ -代数的 π -系; 由 λ -系论证与单调收敛, 等式对一切非负可测 Φ 成立。

推论 13.12 (Blumenthal 0-1 律)

对 Feller 过程的典范版本, 若 $A \in \mathcal{F}_{0+}^X$, 则 $\mathbb{P}_x(A) \in \{0, 1\}$ 。



证明 对 $T = 0$ 与 $\Phi = \mathbf{1}_A$ ($A \in \mathcal{F}_{0+}$ 是路径的可测函数) 应用强马氏性: $\mathbf{1}_A = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_{0+}] = \mathbb{P}_{X_0}(A) = \mathbb{P}_x(A)$ a.s.

13.5 三类重要的 Feller 过程

设 E 为有限集 (离散拓扑, $C_0(E)$ 为一切函数)。矩阵 $L = (L(x, y))$ 称为 Q -矩阵, 若 $L(x, y) \geq 0$ ($x \neq y$) 且 $\sum_y L(x, y) = 0$ 。记 $q_x = -L(x, x) \geq 0$ 。

命题 13.13

设 L 为 Q -矩阵。则 $Q_t = e^{tL}$ 是 Feller 半群, 其生成元为 L ; 反之有限集上每个 Feller 半群都具有这种形式。对相应的 càdlàg 过程 (从 x 出发), 令 $T_1 = \inf\{t: X_t \neq x\}$ 。若 $q_x = 0$, 则 $T_1 = \infty$ a.s.; 若 $q_x > 0$, 则 $T_1 \sim \mathcal{E}(q_x)$, $\mathbb{P}_x(X_{T_1} = y) = L(x, y)/q_x$ ($y \neq x$), 且 T_1 与 X_{T_1} 独立。由强马氏性, 此后过程从 X_{T_1} 重新开始。



证明 取 $c \geq \max_x q_x$, $L + cI \geq 0$ (逐元素), 故 $e^{tL} = e^{-ct} e^{t(L+cI)}$ 的元素非负; $L\mathbf{1} = 0$ 给出 $e^{tL}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ 。半群性质、强连续性与 $\frac{d}{dt} e^{tL}|_{t=0} = L$ 是矩阵指数的性质。反之, 若 (Q_t) 是有限集上的 Feller 半群, 其生成元 L 定义在全空间上 ($D(L)$ 稠密而全空间有限维), 且由 Q_t 的元素非负、行和为 1 知 L 是 Q -矩阵; 由命题 13.7(3), $Q_t = e^{tL}$ 。

路径 càdlàg 且 E 离散, 故在有界区间上只有有限次跳跃, $\{T_1 > t\} = \bigcap_n \{X_{kt2^{-n}} = x, 0 \leq k \leq 2^n\}$ 。由马氏性, $\mathbb{P}_x(T_1 > t) = \lim_n Q_{t2^{-n}}(x, x)^{2^n} = \lim_n (1 - q_x t 2^{-n} + o(2^{-n}))^{2^n} = e^{-q_x t}$ 。若 $q_x > 0$, 对 $f(z) = \mathbf{1}_{\{z=y\}}$ 用 Dynkin 鞅 (命题 13.8) 与有界停时 $T_1 \wedge t$: 在 $[0, T_1]$ 上 $X_s = x$, 故 $\mathbb{E}_x[f(X_{T_1 \wedge t})] - f(x) = Lf(x) \mathbb{E}_x[T_1 \wedge t]$ 。令 $t \rightarrow \infty$, $\mathbb{P}_x(X_{T_1} = y) = L(x, y)/q_x$ 。独立性: 在 $\{T_1 > s\}$ 上 $X_s = x$ 且 $T_1 = s + T_1 \circ \theta_s$, $X_{T_1} = X_{T_1} \circ \theta_s$, 由马氏性 $\mathbb{P}_x(T_1 > s, X_{T_1} = y) = \mathbb{P}_x(T_1 > s) \mathbb{P}_x(X_{T_1} = y)$ 。

于是这个过程的轨道可以这样描述：在 x 处停留 $\mathcal{E}(q_x)$ 时间，然后以概率 $L(x, y)/q_x$ 跳到 y ，如此反复——这正是第 7 章离散时间链的连续时间版本。

例 13.2 (Ornstein–Uhlenbeck 半群) 对 $\lambda > 0$ ，令 $Q_t f(x) = \mathbb{E}[f(e^{-\lambda t}x + \sqrt{\frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}}N)]$ ， $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (Mehler 公式)。半群性质由高斯变量的卷积 (命题 3.14) 验证： $e^{-\lambda s}(e^{-\lambda t}x + \sigma_t N) + \sigma_s N' \stackrel{(d)}{=} e^{-\lambda(t+s)}x + \sigma_{t+s}N$ ，其中 $\sigma_t^2 = \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}$ 。Feller 性质与布朗运动情形相同。对 $f \in C_c^2$ ， $Lf(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \lambda x f'(x)$ (对 Mehler 公式在 $t = 0$ 处求导即得；它也是第 15 章中 Ornstein–Uhlenbeck 方程的生成元)。 $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2\lambda})$ 是不变测度： $\int Q_t f d\gamma = \int f d\gamma$ 。

定义 13.14

取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 càdlàg 过程 X 称为 Lévy 过程，若 $X_0 = 0$ ，且增量平稳独立：对 $s < t$ ， $X_t - X_s$ 与 $\sigma(X_u, u \leq s)$ 独立且与 X_{t-s} 同分布。

命题 13.15

Lévy 过程是转移半群为 $Q_t f(x) = \mathbb{E}[f(x + X_t)]$ 的 Feller 过程。存在函数 $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ 使 $\mathbb{E}[e^{i\langle \xi, X_t \rangle}] = e^{-t\psi(\xi)}$ 。

证明 马氏性由冻结引理 5.5。 $Q_t f \in C_0$ 由控制收敛； $\|Q_t f - f\| \leq \mathbb{E}[\sup_x |f(x + X_t) - f(x)|] \rightarrow 0$ 因为 $X_t \rightarrow 0$ a.s. (右连续) 而 f 一致连续。 $\phi_t(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\langle \xi, X_t \rangle}]$ 满足 $\phi_{t+s} = \phi_t \phi_s$ ， $t \mapsto \phi_t(\xi)$ 右连续且 $\phi_0 = 1$ 。对固定的 ξ ，在 $\phi_t(\xi) \neq 0$ 时可以连续地取对数；由 $|\phi_t| = |\phi_{t/n}|^n$ 与 $\phi_{t/n} \rightarrow 1$ 知 $\phi_t(\xi) \neq 0$ 对一切 t ，于是连续函数 $g(t) = \log \phi_t(\xi)$ (取 $g(0) = 0$ 的连续分支) 满足 Cauchy 方程 $g(t+s) = g(t) + g(s)$ ，故 $g(t) = -t\psi(\xi)$ 。

例 13.3 (1) 布朗运动： $\psi(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ 。(2) 强度为 λ 的 Poisson 过程： $\psi(\xi) = \lambda(1 - e^{i\xi})$ ，生成元 $Lf(x) = \lambda(f(x+1) - f(x))$ 。(3) 复合 Poisson 过程 $X_t = \sum_{k \leq N_t} \xi_k$ (N 为 Poisson 过程， ξ_k 独立同分布于 ν 且与 N 独立)： $\psi(\xi) = \lambda \int (1 - e^{i\langle \xi, y \rangle}) \nu(dy)$ ，生成元 $Lf(x) = \lambda \int (f(x+y) - f(x)) \nu(dy)$ (定义在全部 C_0 上)。

注 [Lévy–Khintchine] 一般地， $\psi(\xi) = -i\langle b, \xi \rangle + \frac{1}{2}\langle \xi, A\xi \rangle + \int (1 - e^{i\langle \xi, y \rangle} + i\langle \xi, y \rangle \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}}) \Pi(dy)$ ，其中 A 半正定， Π 是满足 $\int (1 \wedge |y|^2) \Pi(dy) < \infty$ 的测度 (Lévy 测度)。Le Gall GTM 274 第 6 章还讨论了连续状态分支过程，其 Laplace 指数满足类似的结构。本讲义不使用这些结论。

Galton–Watson 过程 (定理 7.28) 的连续状态类比是连续状态分支过程 (GTM 274 第 6.5.3 节)。我们只讨论其最重要的特例。固定 $\beta > 0$ ，对 $\lambda \geq 0$ ， $t \geq 0$ 令

$$u_t(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \beta \lambda t},$$

它是 $\partial_t u = -\beta u^2$ ， $u_0(\lambda) = \lambda$ 的解，且 $u_t \circ u_s = u_{t+s}$ 。

命题 13.16

在 $E = [0, \infty)$ 上存在 Feller 半群 (Q_t) ，使

$$\int Q_t(x, dy) e^{-\lambda y} = e^{-x u_t(\lambda)} \quad (x, \lambda \geq 0).$$

具体地， $Q_t(x, \cdot)$ 是 $\sum_{i=1}^N E_i$ 的分布，其中 $N \sim \mathcal{P}(\frac{x}{\beta t})$ ， E_i 独立同分布于 $\mathcal{E}(\frac{1}{\beta t})$ 且与 N 独立。它满足分支性： $Q_t(x+x', \cdot) = Q_t(x, \cdot) * Q_t(x', \cdot)$ 。对 $e_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$ ， $e_\lambda \in D(L)$ ， $Le_\lambda(x) = \beta x e_\lambda''(x)$ 。相应的 Feller 过程 (Feller 分支扩散) 满足 $\mathbb{P}_x(Z_t = 0) = e^{-x/(\beta t)} \rightarrow 1$ ($t \rightarrow \infty$)：它 a.s. 灭绝。

证明 直接计算： $\mathbb{E}[e^{-\lambda \sum_{i=1}^N E_i}] = \exp(-\frac{x}{\beta t}(1 - \frac{1/(\beta t)}{1/(\beta t) + \lambda})) = e^{-x u_t(\lambda)}$ 。($t = 0$ 时令 $Q_0(x, \cdot) = \delta_x$ 。) 可测性显然。Chapman–Kolmogorov： $\int Q_t(x, dy) \int Q_s(y, dz) e^{-\lambda z} = \int Q_t(x, dy) e^{-y u_s(\lambda)} = e^{-x u_t(u_s(\lambda))} = e^{-x u_{t+s}(\lambda)}$ ，由命题 2.14(2)， $Q_t Q_s = Q_{t+s}$ 。分支性同理 (Laplace 变换相乘)。

Feller 性质： $Q_t e_\lambda = e_{u_t(\lambda)} \in C_0([0, \infty))$ ($\lambda > 0$)，且 $\|Q_t e_\lambda - e_\lambda\| \leq \sup_x x e^{-x u_t(\lambda)} (\lambda - u_t(\lambda)) \rightarrow 0$ 。 $C_0([0, \infty))$ 中的函数 f 对应于 $[0, 1]$ 上满足 $g(0) = 0$ 的连续函数 $g(v) = f(-\log v)$ ，由 Weierstrass 定理可被 $\{v^n : n \geq 1\}$ 的

线性组合一致逼近, 即 $\{e_n : n \geq 1\}$ 的线性组合在 $C_0([0, \infty))$ 中稠密。由于 Q_t 是压缩, Feller 性质的两个条件推广到整个 C_0 。生成元: $u_t(\lambda) = \lambda - \beta\lambda^2 t + O(t^2)$ (关于 t 一致), 故 $\frac{1}{t}(e^{-xu_t(\lambda)} - e^{-x\lambda}) \rightarrow \beta\lambda^2 x e^{-\lambda x}$ 关于 $x \geq 0$ 一致 ($x^k e^{-\lambda x/2}$ 有界)。最后 $\mathbb{P}_x(Z_t = 0) = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-x/(\beta t)}$; 0 是吸收态 ($Q_t(0, \cdot) = \delta_0$), 故灭绝事件 $\bigcup_t \{Z_t = 0\}$ 的概率为 1。

注 生成元 $\beta x f''$ 说明 Feller 分支扩散是方程 $dZ_t = \sqrt{2\beta Z_t} dB_t$ 的解 ($\frac{1}{2} \cdot 2\beta x = \beta x$), 等价地 $Y = 2Z/\beta$ 满足 $dY_t = 2\sqrt{Y_t} dB_t$, 是零维平方 Bessel 过程 (例 15.4 中 $\delta = 0 < 2$: 击中 0)。Feller 证明了它是临界 Galton–Watson 过程经适当标度后的极限; 一般的分支机制 ψ 给出满足 $\partial_t u = -\psi(u)$ 的连续状态分支过程, 见 GTM 274 第 6 章。

第 14 章 布朗运动与偏微分方程

布朗运动的生成元是 $\frac{1}{2}\Delta$ 。这一事实把布朗运动与热方程、调和函数和 Dirichlet 问题紧密联系起来：解可以表示为布朗运动泛函的期望，而布朗运动的性质（常返与暂留、离出分布）可以用调和函数计算。这种联系是 Kemeny–Snell–Knapp 第 7 章中“随机游走位势论”的连续类比。

本章中 B 是 d 维布朗运动， $\mathbb{P}_x$ 表示 $B_0 = x$ 时的概率（第 9 章），滤子取为通常增广的自然滤子。对 $D \subset \mathbb{R}^d$ 开集， $T_D = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D\}$ 为离出时。区域指连通开集。

14.1 热方程

定理 14.1

设 $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 有界连续， $u(t, x) = \mathbb{E}_x[\varphi(B_t)] = \int p_t(y - x)\varphi(y)dy$ ($t > 0$)， $u(0, x) = \varphi(x)$ 。则 u 在 $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上有界连续，在 $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上 C^∞ ，且满足热方程 $\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u$ 。反之，若 v 在 $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上有界连续，在 $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上 $C^{1,2}$ ，满足 $\partial_t v = \frac{1}{2}\Delta v$ 与 $v(0, \cdot) = \varphi$ ，则 $v = u$ 。

证明 热核 $p_t(z) = (2\pi t)^{-d/2}e^{-|z|^2/(2t)}$ 满足 $\partial_t p_t = \frac{1}{2}\Delta p_t$ （直接计算），其对 (t, x) 的各阶导数在 $[\varepsilon, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上被可积函数控制，故可以在积分号下求导。在 $t = 0$ 处的连续性： $u(t, x) = \mathbb{E}[\varphi(x + \sqrt{t}N)]$ ， $N \sim \mathcal{N}(0, I)$ ，用控制收敛。

唯一性：固定 $T > 0$ ， x 。对 $s < T$ ，由 Itô 公式（定理 12.12 后的注记）， $M_s = v(T - s, B_s)$ 满足 $dM_s = \nabla_x v(T - s, B_s) \cdot dB_s$ （漂移项 $-\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = 0$ ），故 $(M_s)_{s < T}$ 是有界连续局部鞅，从而是鞅。于是对 $s < T$ ， $v(T, x) = \mathbb{E}_x[v(T - s, B_s)]$ ，令 $s \uparrow T$ ，由 v 的连续有界性与控制收敛， $v(T, x) = \mathbb{E}_x[\varphi(B_T)]$ 。

定理 14.2 (Feynman–Kac 公式)

设 $V : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ 与 $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 有界连续。若 v 在 $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上有界连续，在 $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上 $C^{1,2}$ ，满足

$$\partial_t v = \frac{1}{2}\Delta v - Vv, \quad v(0, \cdot) = \varphi,$$

则 $v(t, x) = \mathbb{E}_x[\varphi(B_t) \exp(-\int_0^t V(B_s)ds)]$ 。

证明 固定 $T > 0$ ，令 $E_s = \exp(-\int_0^s V(B_r)dr)$ （连续有限变差过程， $dE_s = -V(B_s)E_s ds$ ）。对 $s < T$ ，由 Itô 公式与分部积分， $M_s = v(T - s, B_s)E_s$ 满足

$$dM_s = E_s(-\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v - Vv)(T - s, B_s)ds + E_s \nabla_x v(T - s, B_s) \cdot dB_s = E_s \nabla_x v \cdot dB_s,$$

故 $(M_s)_{s < T}$ 是有界 ($|M| \leq \|v\|_\infty$) 连续局部鞅，从而是鞅。于是 $v(T, x) = \mathbb{E}_x[M_s]$ ，令 $s \uparrow T$ 并用控制收敛。

当 $V \equiv 0$ 时这就是定理 14.1 的唯一性部分。 V 可以解释为“杀死率”： $\mathbb{E}_x[\varphi(B_t)E_t]$ 是以速率 $V(B_s)$ 被杀死的布朗运动在时刻 t 存活且处于某处的加权期望。第 16 章将用它的预解形式计算反正弦律。

14.2 球面上的均匀分布

引理 14.3

单位球面 S^{d-1} 上存在唯一的、在一切正交变换下不变的概率测度 σ_1 。它是 $N/|N|$ 的分布 ($N \sim \mathcal{N}(0, I_d)$)，并且对非负可测 f ，

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = dV_d \int_0^\infty r^{d-1} \left(\int_{S^{d-1}} f(ry)\sigma_1(dy) \right) dr, \quad (14.1)$$

其中 V_d 为单位球的体积。对 $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, 记 $\sigma_{x,r}$ 为 σ_1 在 $y \mapsto x + ry$ 下的像。



证明 $N/|N|$ 的分布是不变的 ($ON \stackrel{(d)}{=} N$)。唯一性: 设 μ 不变, $Y \sim \mu$ 与 $U \sim \sigma_1$ 独立。对固定的 $u \in S^{d-1}$, 取正交变换 O 使 $Ou = e_1$ (例如 Householder 反射), 则 $\langle Y, u \rangle = \langle OY, Ou \rangle = \langle OY, e_1 \rangle \stackrel{(d)}{=} \langle Y, e_1 \rangle$ 。因此对 U 取条件, $\langle Y, U \rangle \stackrel{(d)}{=} \langle Y, e_1 \rangle$; 同理对 Y 取条件, $\langle Y, U \rangle \stackrel{(d)}{=} \langle e_1, U \rangle$ 。故 $Y_1 \stackrel{(d)}{=} U_1$ 。对任意 $\xi \neq 0$, $\langle \xi, Y \rangle \stackrel{(d)}{=} |\xi| Y_1 \stackrel{(d)}{=} |\xi| U_1 \stackrel{(d)}{=} \langle \xi, U \rangle$, 特征函数相同, $\mu = \sigma_1$ 。对 (14.1): 测度 $A \mapsto \lambda_d(\{x : 0 < |x| \leq 1, x/|x| \in A\})/V_d$ 是 S^{d-1} 上的不变概率测度 (λ_d 在正交变换下不变), 故等于 σ_1 ; 由标度, $\lambda_d(\{a < |x| \leq b, x/|x| \in A\}) = (b^d - a^d)V_d\sigma_1(A)$, 这正是 (14.1) 对 $f = \mathbf{1}_{\{a < |x| \leq b, x/|x| \in A\}}$ 的形式。这些集合构成生成 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ 的 π -系 (引理 1.4, 经同胚 $x \mapsto (|x|, x/|x|)$), 由推论 1.7 与单调类论证得证。

命题 14.4

令 $\tau_{x,r} = \inf\{t : |B_t - x| = r\}$ 。在 $\mathbb{P}_x$ 下, $B_{\tau_{x,r}} \sim \sigma_{x,r}$, 且 $\mathbb{E}_x[\tau_{x,r}] = r^2/d$ 。



证明 由平移与标度不变性, 只需考虑 $x = 0$, $r = 1$ 。对正交变换 O , OB 是布朗运动, 且 $\tau_{0,1}$ 对 OB 与 B 相同, 故 B_τ 的分布不变, 由引理 14.3 它是 σ_1 。 $|B_t|^2 - dt$ 是鞅 (Itô 公式), 对有界停时 $\tau \wedge n$ 应用并令 $n \rightarrow \infty$: $\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}|B_\tau|^2/d = 1/d$ 。

14.3 调和函数

定义 14.5

开集 D 上的函数 u 称为调和的, 若 $u \in C^2(D)$ 且 $\Delta u = 0$ 。局部有界可测函数 u 称为满足均值性质, 若对一切 $x \in D$ 与 $r > 0$, $\bar{B}(x, r) \subset D$ 蕴含 $u(x) = \int u d\sigma_{x,r}$ 。



命题 14.6

u 在 D 上调和, 当且仅当它满足均值性质。此时 $u \in C^\infty(D)$ 。



证明 若 u 调和, $\bar{B}(x, r) \subset D$, 对 u 与停止过程 $B^{\tau_{x,r}}$ 用 Itô 公式 (u 在 $\bar{B}(x, r)$ 的邻域内 C^2 , 可乘以截断函数延拓到 $\mathbb{R}^d$), $u(B_{t \wedge \tau}) = u(x) + \int_0^{t \wedge \tau} \nabla u(B_s) \cdot dB_s$ 是有界鞅, 故 $u(x) = \mathbb{E}_x[u(B_\tau)] = \int u d\sigma_{x,r}$ (命题 14.4)。

反之, 设 u 满足均值性质。固定 $r_0 > 0$, $D_0 = \{x : d(x, D^c) > r_0\}$ 。取 $h \in C_c^\infty((0, r_0))$, $h \geq 0$ 不恒为 0。对 $x \in D_0$, 在 $u(x) = \int u d\sigma_{x,r}$ 两边乘以 $dV_d r^{d-1} h(r)$ 并对 r 积分, 由 (14.1), $cu(x) = \int h(|z-x|)u(z)dz$ ($c = \int h(|y|)dy > 0$)。右边是 $u\mathbf{1}_D$ 与 C_c^∞ 函数的卷积, 故 $u \in C^\infty(D_0)$ 。最后, 对 $x \in D_0$, $r < r_0$, 由 Itô 公式与命题 14.4, $0 = \mathbb{E}_x[u(B_\tau)] - u(x) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\tau \Delta u(B_s) ds$ 。若 $\Delta u(x) > 0$, 则对小的 r , $\Delta u > 0$ 于 $\bar{B}(x, r)$, 矛盾 ($\mathbb{E}_x \tau > 0$); 同理 $\Delta u(x) < 0$ 不可能。

命题 14.7 (极大值原理与唯一性)

设 D 为有界区域, $u \in C(\bar{D})$ 在 D 上调和。则 $u(x) = \mathbb{E}_x[u(B_{T_D})]$ ($x \in D$)。特别地 $\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u$, 且这样的 u 由其在 ∂D 上的值唯一决定。



证明 $T_D < \infty$ a.s. (B^1 的轨道无界, 推论 9.17)。令 $D_n = \{x \in D : d(x, D^c) > 1/n\}$, 则 $T_{D_n} \uparrow T_D$ 。在 $\bar{D}_n$ 的邻域上 u 是 C^2 的, 如上一证明, $u(x) = \mathbb{E}_x[u(B_{T_{D_n}})]$ 。令 $n \rightarrow \infty$, 由路径连续性与 u 在 $\bar{D}$ 上的有界连续性, $u(B_{T_{D_n}}) \rightarrow u(B_{T_D})$, 控制收敛即得。

14.4 Dirichlet 问题

定义 14.8

设 D 为有界区域, $g \in C(\partial D)$ 。Dirichlet 问题是寻找 $u \in C(\bar{D})$, 在 D 上调和, 在 ∂D 上等于 g 。点 $y \in \partial D$ 称为正则的, 若 $\mathbb{P}_y(\tilde{T}_D = 0) = 1$, 其中 $\tilde{T}_D = \inf\{t > 0 : B_t \notin D\}$ 。



由 Blumenthal 0-1 律, $\mathbb{P}_y(\tilde{T}_D = 0) \in \{0, 1\}$ ($\{\tilde{T}_D = 0\} \in \mathcal{F}_{0+}$)。

定理 14.9

设 D 为有界区域, $g \in C(\partial D)$, $u(x) = \mathbb{E}_x[g(B_{T_D})]$ ($x \in \bar{D}$)。则 u 在 D 上调和, 且对每个正则点 $y \in \partial D$, $\lim_{x \rightarrow y, x \in D} u(x) = g(y)$ 。因此, 若 ∂D 的每一点都正则, 则 Dirichlet 问题有唯一解 u 。



证明 调和性。若 $\bar{B}(x, r) \subset D$, 则 $\tau = \tau_{x, r} \leq T_D$, 且 $T_D = \tau + T_D \circ \theta_\tau$, $B_{T_D} = B_{T_D} \circ \theta_\tau$ 。由强马氏性 (推论 9.20), $u(x) = \mathbb{E}_x[u(B_\tau)] = \int u d\sigma_{x, r}$ 。 u 有界可测, 由命题 14.6, u 调和。

边界行为。设 y 正则, $\eta > 0$ 。对 $0 < \varepsilon < \eta$, 由马氏性,

$$\phi_\varepsilon(x) := \mathbb{P}_x(\exists t \in [\varepsilon, \eta] : B_t \notin D) = \int p_\varepsilon(z - x) \mathbb{P}_z(T_D \leq \eta - \varepsilon) dz$$

关于 x 连续 (控制收敛)。由正则性, $\phi_\varepsilon(y) \uparrow \mathbb{P}_y(\exists t \in (0, \eta] : B_t \notin D) = 1$ ($\varepsilon \downarrow 0$)。因此 $\liminf_{x \rightarrow y} \mathbb{P}_x(T_D \leq \eta) \geq \lim_{x \rightarrow y} \phi_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(y)$, 令 $\varepsilon \downarrow 0$ 得 $\mathbb{P}_x(T_D \leq \eta) \rightarrow 1$ ($x \rightarrow y$)。给定 $\delta > 0$, 在事件 $\{T_D \leq \eta\} \cap \{\sup_{t \leq \eta} |B_t - x| < \delta\}$ 上 $|B_{T_D} - y| < |x - y| + \delta$ 。故

$$|u(x) - g(y)| \leq \sup\{|g(z) - g(y)| : z \in \partial D, |z - y| < |x - y| + \delta\} + 2\|g\|_\infty (\mathbb{P}_x(T_D > \eta) + \mathbb{P}_0(\sup_{t \leq \eta} |B_t| \geq \delta)).$$

先取 δ 小, 再取 η 小, 最后令 $x \rightarrow y$ 。唯一性由命题 14.7。

命题 14.10 (外锥条件)

若 $y \in \partial D$, 且存在顶点在 y 的开圆锥 C 与 $r > 0$ 使 $C \cap B(y, r) \subset D^c$, 则 y 正则。特别地, 若 D 的边界是 C^1 的 (或 D 是凸的), 则每个边界点都正则。



证明 锥在以 y 为中心的伸缩下不变, 故 $\alpha := \mathbb{P}_y(B_t \in C)$ 不依赖于 $t > 0$, 且 $\alpha > 0$ 。于是 $\mathbb{P}_y(\tilde{T}_D \leq t) \geq \mathbb{P}_y(B_t \in C) - \mathbb{P}_y(\sup_{s \leq t} |B_s - y| \geq r) \rightarrow \alpha$ ($t \rightarrow 0$), 故 $\mathbb{P}_y(\tilde{T}_D = 0) \geq \alpha > 0$, 由 0-1 律等于 1。

注 在 $d \geq 2$ 时, 挖去一点的圆盘 $D = B(0, 1) \setminus \{0\}$ 的边界点 0 不正则 (下面将证明布朗运动不击中点), Dirichlet 问题在 $g(0) = 1$, $g = 0$ 于 $|y| = 1$ 时无解。

14.5 Poisson 核

定理 14.11

设 $D = B(0, 1)$, $g \in C(\partial D)$ 。则对 $|x| < 1$,

$$\mathbb{E}_x[g(B_{T_D})] = \int_{S^{d-1}} g(y) \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^d} \sigma_1(dy).$$

即: 从 x 出发的布朗运动的离出分布有关于 σ_1 的密度 $K(x, y) = (1 - |x|^2)|x - y|^{-d}$ (Poisson 核)。



证明 $K(\cdot, y)$ 调和 ($|y| = 1$)。记 $z = x - y$ 。利用 $\Delta|z|^a = a(a + d - 2)|z|^{a-2}$,

$$\Delta((1 - |x|^2)|z|^{-d}) = -2d|z|^{-d} + 2(-2x) \cdot (-dz|z|^{-d-2}) + (1 - |x|^2)2d|z|^{-d-2} = 2d|z|^{-d-2}(-|z|^2 + 2x \cdot z + 1 - |x|^2),$$

而由 $|y| = 1$, $|z|^2 = |x|^2 - 2x \cdot y + 1$, 括号为 0。

$\int K(x, y) \sigma_1(dy) = 1$ 。 $F(x) = \int K(x, y) \sigma_1(dy)$ 在 D 上调和 (在积分号下求导), 且对正交变换 O , $F(Ox) =$

$F(x)$ ($K(Ox, Oy) = K(x, y)$ 与 σ_1 的不变性)。由均值性质, 对 $r < 1$, $1 = F(0) = \int F(ry)\sigma_1(dy) = F(re_1)$, 故 $F \equiv 1$ 。

边界行为。令 $u(x) = \int g(y)K(x, y)\sigma_1(dy)$, 它在 D 上调和。对 $y_0 \in \partial D$, $\delta > 0$, 当 $|x - y_0| < \delta/2$ 时 $\int_{|y-y_0| \geq \delta} K(x, y)\sigma_1(dy) \leq (1 - |x|^2)(2/\delta)^d \rightarrow 0$ ($x \rightarrow y_0$)。于是 $|u(x) - g(y_0)| \leq \sup_{|y-y_0| < \delta} |g(y) - g(y_0)| + 2\|g\|_\infty(1 - |x|^2)(2/\delta)^d$, 故 u 连续延拓到 $\bar{D}$ 且等于 g 于 ∂D 。由命题 14.7 (唯一性), $u(x) = \mathbb{E}_x[g(B_{T_D})]$ 。

推论 14.12 (Harnack 不等式)

设 $u \geq 0$ 在 $B(0, R)$ 的邻域上调和。则对 $|x| < R$,

$$\frac{R^{d-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{d-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{d-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{d-1}}u(0).$$



证明 由标度不妨 $R = 1$ 。由定理 14.11 与命题 14.7, $u(x) = \int u(y)\frac{1-|x|^2}{|x-y|^d}\sigma_1(dy)$, 而 $u(0) = \int u d\sigma_1$ 。用 $1 - |x| \leq |x - y| \leq 1 + |x|$ 估计核。

由 Harnack 不等式可知, 区域上非负调和函数的全体在“ $u(x_0) = 1$ ”的归一化下是紧的; 这是连续情形 Martin 边界理论的出发点。

14.6 常返性与暂留性

命题 14.13

设 $0 < r < |x| < R$, $T_r = \inf\{t : |B_t| = r\}$, T_R 类似。则

$$\mathbb{P}_x(T_r < T_R) = \begin{cases} \frac{R - |x|}{R - r}, & d = 1, \\ \frac{\log R - \log |x|}{\log R - \log r}, & d = 2, \\ \frac{|x|^{2-d} - R^{2-d}}{r^{2-d} - R^{2-d}}, & d \geq 3. \end{cases}$$



证明 $\phi(x) = |x|$ ($d = 1$), $\log|x|$ ($d = 2$), $|x|^{2-d}$ ($d \geq 3$) 在 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上调和 ($\Delta|x|^a = a(a + d - 2)|x|^{a-2}$; $\Delta \log|x| = 0$ 于 $d = 2$)。环形区域是有界区域, 边界满足外锥条件。由命题 14.7 (应用于在闭环域上连续、内部调和的 ϕ), $\phi(x) = \mathbb{E}_x[\phi(B_{T_r \wedge T_R})] = \phi(r)p + \phi(R)(1 - p)$, $p = \mathbb{P}_x(T_r < T_R)$ ($T_r \wedge T_R < \infty$ a.s.)。

定理 14.14

(1) $d = 1$: 布朗运动常返, a.s. 击中每一点无穷多次。(2) $d = 2$: 布朗运动邻域常返——对每个开集 U , a.s. $\{t : B_t \in U\}$ 无界; 但对 $x \neq 0$, $\mathbb{P}_x(\exists t > 0, B_t = 0) = 0$ (点是极集)。(3) $d \geq 3$: 布朗运动暂留, $|B_t| \rightarrow \infty$ a.s.; 点也是极集。



证明 (1) 由推论 9.17。(2) 在命题 14.13 中令 $R \rightarrow \infty$ 得 $\mathbb{P}_x(T_r < \infty) = 1$, 即 a.s. 进入每个球 $B(0, r)$; 由平移不变性与强马氏性 (在离开大球后再次进入), 进入是无限次的。令 $r \rightarrow 0$: $\mathbb{P}_x(T_0 < T_R) \leq \mathbb{P}_x(T_r < T_R) \rightarrow 0$, 再令 $R \rightarrow \infty$ 。对 $x = 0$, 由马氏性 $\mathbb{P}_0(\exists t > \varepsilon : B_t = 0) = \mathbb{E}_0[\mathbb{P}_{B_\varepsilon}(T_0 < \infty)] = 0$, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。(3) 令 $R \rightarrow \infty$: $\mathbb{P}_x(T_r < \infty) = (r/|x|)^{d-2}$ 。对 n , 令 $S_n = \inf\{t : |B_t| = n^3\}$, 由强马氏性 $\mathbb{P}(\exists t \geq S_n : |B_t| \leq n) = n^{-2(d-2)} \leq n^{-2}$, 由 Borel-Cantelli, a.s. 最终 $|B_t| > n$ 对 $t \geq S_n$ 成立。极集性同 (2)。

例 14.1 (严格局部鞅) 设 $d = 3$, $x \neq 0$ 。由于 B 不击中 0, 可以对 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上的调和函数 $|x|^{-1}$ 用 Itô 公式 (注记于定理 12.12 之后), $M_t = |B_t|^{-1}$ 是连续局部鞅。但 $\mathbb{E}_x[M_t] \leq \mathbb{E}_x[|B_t|^{-1}] \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$; 用 (14.1) 与热核估计), 而 $M_0 = |x|^{-1} > 0$, 故 M 不是鞅。(类似的估计表明 $\sup_t \mathbb{E}_x[M_t^2] < \infty$, 从而 M 一致可积。)

14.7 Green 函数、Liouville 定理与半平面的离出分布

命题 14.15 (布朗运动的 Green 函数)

设 $d \geq 3$ 。对 $x \neq y$,

$$G(x, y) := \int_0^\infty p_t(y - x) dt = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - 1)}{2\pi^{d/2}} |x - y|^{2-d}.$$

对非负可测 f , $\mathbb{E}_x[\int_0^\infty f(B_t) dt] = \int G(x, y) f(y) dy =: Gf(x)$ (平均占位时间)。若 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, 则 $Gf \in C^2$ 且 $\frac{1}{2}\Delta(Gf) = -f$ 。



证明 令 $r = |x - y|$, 作替换 $u = r^2/(2t)$: $\int_0^\infty (2\pi t)^{-d/2} e^{-r^2/(2t)} dt = \pi^{-d/2} \frac{r^{2-d}}{2} \int_0^\infty u^{d/2-2} e^{-u} du$ 。第二个论断由 Fubini。最后, $Q_t f = p_t * f$, $\Delta(Q_t f) = Q_t(\Delta f)$ (在积分号下求导), 由例 13.1, $\frac{d}{dt} Q_t f = \frac{1}{2} Q_t \Delta f$ 。 $|Q_t f| \leq (2\pi t)^{-d/2} \|f\|_1$, $d \geq 3$ 时 $\int_1^\infty t^{-d/2} dt < \infty$, 故 $Gf = \int_0^\infty Q_t f dt$ 可在积分号下求两次导, $\frac{1}{2}\Delta Gf = \int_0^\infty \frac{d}{dt} Q_t f dt = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t f - f = -f$ 。

这与离散 Green 函数满足的 $(I - Q)G = I$ (式 (8.1)) 完全平行: $-\frac{1}{2}\Delta$ 是 $I - Q$ 的连续类比, $|x|^{2-d}$ 是 Newton 位势。

定理 14.16 (Liouville)

$\mathbb{R}^d$ 上有界的调和函数都是常数。等价地, 布朗运动的 Poisson 边界是平凡的。



证明 由均值性质 (命题 14.6) 与 (14.1), 对一切 $R > 0$, $u(x) = \frac{1}{V_d R^d} \int_{B(x, R)} u(z) dz$ 。故 $|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_\infty \frac{\lambda_d(B(x, R) \triangle B(y, R))}{V_d R^d} \leq \|u\|_\infty \frac{2V_d((R+|x-y|)^d - (R-|x-y|)^d)}{V_d R^d} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$)。

与例 8.4 对比: 树上的随机游走有大量有界调和函数, 而 $\mathbb{R}^d$ (以及 $\mathbb{Z}^d$) 上没有。

命题 14.17 (半平面的离出分布)

设 $B = (B^1, B^2)$ 为从 $(0, y)$ ($y > 0$) 出发的平面布朗运动, $T = \inf\{t : B_t^2 = 0\}$ 。则 B_T^1 服从密度为 $\frac{y}{\pi(y^2 + x^2)}$ 的 Cauchy 分布。



证明 T 是 B^2 的首中时, 与 B^1 独立。由反射原理, $\mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(|N_2| \sqrt{t} \geq y)$, 即 $T \stackrel{(d)}{=} y^2/N_2^2$ 。由冻结引理, 给定 T , $B_T^1 \sim \mathcal{N}(0, T)$, 故 $B_T^1 \stackrel{(d)}{=} \sqrt{T} N_1 \stackrel{(d)}{=} y N_1/|N_2| \stackrel{(d)}{=} y N_1/N_2$, N_1, N_2 独立标准正态。 (N_1, N_2) 的分布旋转不变, 其辐角 Θ 在 $[0, 2\pi)$ 上均匀分布, $N_1/N_2 = \cot \Theta$, 其分布函数为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$ 。

例 14.2 (Cauchy 过程) 设 (β, γ) 为平面布朗运动, $T_s = \inf\{u : \beta_u = s\}$ ($s \geq 0$)。则 $C_s = \gamma_{T_s}$ 是 Lévy 过程, C_s 服从参数为 s 的 Cauchy 分布 (命题 14.17), 其特征指数 (第 13 章) 为 $\psi(\xi) = |\xi|$ 。确实, $s \mapsto T_s$ 是右连续的递增停时族, $T_{s+r} = T_s + \inf\{u : \beta_{T_s+u} - \beta_{T_s} = r\}$; 由强马氏性, $(\beta_{T_s+}, \gamma_{T_s+})$ 是与 $\mathcal{F}_{T_s}$ 独立的平面布朗运动, 故 $C_{s+r} - C_s$ 与 $(C_u)_{u \leq s}$ 独立且与 C_r 同分布。 C 的路径右连续 (T 右连续, γ 连续), 有左极限。这是“用布朗运动的首中时作时间变换” (从属) 的一个例子。

14.8 平面布朗运动与共形不变性

把 $\mathbb{R}^2$ 等同于 $\mathbb{C}$ 。复布朗运动是 $Z = X + iY$, (X, Y) 为二维布朗运动。

定理 14.18 (Lévy 共形不变性)

设 Z 为从 z 出发的复布朗运动, $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为非常数整函数。令 $C_t = \int_0^t |\Phi'(Z_s)|^2 ds$ 。则 $C_\infty = \infty$ a.s., 且存在从 $\Phi(z)$ 出发的复布朗运动 Γ 使 $\Phi(Z_t) = \Gamma_{C_t}$ 对一切 t 成立。



证明 记 $\Phi = P + iQ$ 。由 Cauchy-Riemann 方程, P, Q 调和, $|\nabla P|^2 = |\nabla Q|^2 = |\Phi'|^2$, $\nabla P \cdot \nabla Q = 0$ 。由 Itô 公

式, $U_t = P(Z_t) - P(z)$ 与 $V_t = Q(Z_t) - Q(z)$ 是连续局部鞅, $\langle U \rangle = \langle V \rangle = C$, $\langle U, V \rangle = 0$ 。

$C_\infty = \infty$: Φ' 不恒为 0, 存在圆盘 $B(w, \rho)$ 使 $|\Phi'|^2 \geq c > 0$ 于其上。由邻域常返性, Z 无穷多次进入 $B(w, \rho/2)$ (在两次进入之间先离开 $B(w, \rho)$)。每次进入后, 在离开 $B(w, \rho)$ 之前停留的时间不小于离开以进入点为中心、半径 $\rho/2$ 的球所需的时间; 由强马氏性, 后者构成独立同分布的正随机变量序列 (命题 14.4), 由强大数定律其和为无穷, 故 $C_\infty \geq c \cdot \infty = \infty$ 。

令 $\tau_r = \inf\{t : C_t > r\}$, $\beta_r = U_{\tau_r}$, $\gamma_r = V_{\tau_r}$ 。完全如定理 12.15 的证明, β, γ 是连续的 $(\mathcal{F}_{\tau_r})$ -局部鞅 (实际上是鞅), $\langle \beta \rangle_r = \langle \gamma \rangle_r = r$; 对 $\beta\gamma$ 同样由可选停止定理 (UV 在 τ_n 处停止后是一致可积鞅, 因为 $\langle U+V \rangle^{\tau_n} \leq 2n$) 得 $\langle \beta, \gamma \rangle = 0$ 。由 Lévy 定理 12.14, (β, γ) 是二维布朗运动; 令 $\Gamma = \Phi(z) + \beta + i\gamma$ 。最后 $\Phi(Z_t) = \Gamma_{C_t}$ 与定理 12.15 最后一步相同。

定理 14.19 (Spitzer)

设 Z 为从 1 出发的复布朗运动, θ_t 为 $\arg Z_t$ 的连续确定 ($\theta_0 = 0$; 由于 Z 不击中 0, 它存在且唯一)。则

$$\frac{2\theta_t}{\log t} \xrightarrow{(d)} \text{Cauchy 分布} \quad (t \rightarrow \infty).$$

证明 第一步: 表示。设 $W = \beta + i\gamma$ 为从 0 出发的复布朗运动。由定理 14.18 ($\Phi = \exp$), $e^{W_s} = \Gamma_{C_s}$, $C_s = \int_0^s e^{2\beta_u} du$, Γ 为从 1 出发的复布朗运动, $C_\infty = \infty$ 。令 $H = C^{-1}$, 则 $\Gamma_t = \exp(W_{H_t})$, $H_t = \int_0^t |\Gamma_u|^{-2} du$, 且 γ_{H_t} 是 $\arg \Gamma_t$ 的连续确定。由于 θ 是路径的确定性泛函, 只需对 $Z = \Gamma$ 证明, 此时 $\theta_t = \gamma_{H_t}$ 。

第二步: 标度。令 $\lambda = \log \sqrt{t}$, $\beta_s^{(\lambda)} = \lambda^{-1} \beta_{\lambda^2 s}$, $\gamma_s^{(\lambda)} = \lambda^{-1} \gamma_{\lambda^2 s}$ (独立的布朗运动), $\tau_c^{(\lambda)} = \inf\{s : \beta_s^{(\lambda)} = c\} = \lambda^{-2} \inf\{u : \beta_u = \lambda c\}$ 。则 $\theta_t/\lambda = \gamma_{\lambda^{-2} H_t}^{(\lambda)}$, 而 $\gamma_{\tau_1^{(\lambda)}}^{(\lambda)}$ 服从 Cauchy 分布 (命题 14.17, $y = 1$)。由于 $\gamma^{(\lambda)}$ 是布朗运动而 $\tau_1^{(\lambda)} \stackrel{(d)}{=} \tau_1$ 是胎紧的, 由路径的一致连续性, 只需证明 $\lambda^{-2} H_t - \tau_1^{(\lambda)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ 。

第三步: 比较。令 $\sigma_r = \inf\{u : |\Gamma_u| = r\}$ 。由 $|\Gamma_u| = e^{\beta_{H_u}}$, $H_{\sigma_r} = \inf\{s : \beta_s = \log r\}$, 于是 $\lambda^{-2} H_{\sigma_{a\sqrt{t}}} = \tau_{1+\log a/\lambda}^{(\lambda)}$ 。给定 $\eta > 0$, 取 $0 < a < 1 < b$ 使对一切充分大的 t , $\mathbb{P}(\sigma_{a\sqrt{t}} \leq t \leq \sigma_{b\sqrt{t}}) \geq 1 - \eta$: 由标度, $\Gamma_t/\sqrt{t}$ 是从 $1/\sqrt{t}$ 出发的布朗运动, 故 $\mathbb{P}(\sigma_{a\sqrt{t}} > t) \leq \sup_{|z| \leq a/2} \mathbb{P}_z(|B_1| < a) \leq Ca^2$, $\mathbb{P}(\sigma_{b\sqrt{t}} < t) \leq \mathbb{P}_0(\sup_{s \leq 1} |B_s| \geq b-1)$ 。在该事件上, H 递增给出

$$\tau_{1+\log a/\lambda}^{(\lambda)} \leq \lambda^{-2} H_t \leq \tau_{1+\log b/\lambda}^{(\lambda)}.$$

而 $(\tau_c^{(\lambda)})_c \stackrel{(d)}{=} (\tau_c)_c$ (标准布朗运动的首中时), $c \mapsto \tau_c$ 在 $c = 1$ 处 a.s. 连续 ($\tau_{1+} = \tau_1$ 由强马氏性与推论 9.17; $\tau_{1-} = \tau_1$ 由连续性), 故 $\tau_{1 \pm \epsilon_\lambda}^{(\lambda)} - \tau_1^{(\lambda)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ ($\epsilon_\lambda \rightarrow 0$)。综上 $\lambda^{-2} H_t - \tau_1^{(\lambda)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ 。

第 15 章 随机微分方程

随机微分方程 $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$ 是构造扩散过程的主要工具：它的解是生成元为 $\frac{1}{2} \sum a_{ij} \partial_{ij} + \sum b_i \partial_i$ ($a = \sigma \sigma^\top$) 的 Feller 过程。本章证明 Lipschitz 系数下解的存在唯一性及其马氏性，介绍 Yamada–Watanabe 的路径唯一性判别法，并讨论几个重要例子。

15.1 定义

设 $d, m \geq 1$, $\sigma: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$, $b: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为局部有界可测函数。

定义 15.1

方程 $E(\sigma, b)$:

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$$

的一个解由以下资料组成：满足通常条件的带滤子概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ ，其上的 m 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 B ，以及取值于 $\mathbb{R}^d$ 的连续适应过程 X ，使得 a.s. 对一切 t ,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

(分量形式: $X_t^i = X_0^i + \sum_j \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dB_s^j + \int_0^t b_i(s, X_s)ds$)。

- 称 $E(\sigma, b)$ 有路径唯一性，若在同一带滤子概率空间与同一布朗运动 B 上的两个解 X, X' ，只要 $X_0 = X'_0$ a.s.，就有 X 与 X' 不可区分。
- 称 $E(\sigma, b)$ 有弱存在性，若对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 都存在某个解满足 $X_0 = x$ ；有依分布唯一性，若 $X_0 = x$ 的所有解（可能在不同概率空间上）都有相同的分布。
- 称解 X 是强解，若 X 关于 X_0 与 B 生成的（完备化）滤子适应。



注 [Yamada–Watanabe] 可以证明：弱存在性加上路径唯一性蕴含依分布唯一性，且每个解都是强解。在 Lipschitz 情形下我们将直接证明这些结论（定理 15.3），因此不需要这个一般定理。

引理 15.2 (Gronwall)

设 g 是 $[0, T]$ 上的有界可测函数， $a, c \geq 0$ ，且 $g(t) \leq a + c \int_0^t g(s)ds$ 对 $t \in [0, T]$ 成立。则 $g(t) \leq ae^{ct}$ 。



证明 反复代入: $g(t) \leq a \sum_{k < n} \frac{(ct)^k}{k!} + c^n \int_{0 < s_n < \dots < s_1 < t} g(s_n)ds \leq ae^{ct} + \|g\|_\infty \frac{(ct)^n}{n!}$, 令 $n \rightarrow \infty$ 。

15.2 Lipschitz 情形

假设 (L): σ, b 连续，且存在 K 使对一切 t, x, y ,

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$

(矩阵用 Hilbert–Schmidt 范数)。于是对每个 T ，存在 K_T 使 $|\sigma(t, x)| + |b(t, x)| \leq K_T(1 + |x|)$, $t \leq T$ 。

定理 15.3

在假设 (L) 下:

1. $E(\sigma, b)$ 有路径唯一性。
2. 在任何带 m 维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动 B 的带滤子概率空间上，对任何 $x \in \mathbb{R}^d$ ，存在（唯一的）解 X 满足 $X_0 = x$ ，它是强解。

3. 存在可测映射 $F: \mathbb{R}^d \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) \rightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (不依赖于概率空间), 使得对每个 $\mathcal{F}_0$ -可测的 X_0 , $X = F(X_0, B)$ 是从 X_0 出发的唯一解。特别地, $E(\sigma, b)$ 有依分布唯一性。

证明 (1) 唯一性。设 X, X' 为两个解, $X_0 = X'_0$ 。对 $M > 0$ 令 $\tau = \inf\{t: |X_t| \geq M \text{ 或 } |X'_t| \geq M\}$ (若 X_0 无界, 先限制在 $\{|X_0| \leq M\} \in \mathcal{F}_0$ 上)。固定 T , 令 $g(t) = \mathbb{E}[|X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau}|^2]$ (有界)。由 $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ 、等距性 (停止后被积函数有界) 与 Cauchy-Schwarz,

$$g(t) \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)|^2 ds\right] + 2T\mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} |b(s, X_s) - b(s, X'_s)|^2 ds\right] \leq 2(1+T)K^2 \int_0^t g(s) ds.$$

由 Gronwall 引理 $g \equiv 0$; 令 $M \rightarrow \infty$, 再由连续性得不可区分。

(2) 存在性。先设 $X_0 \in L^2$ 是 $\mathcal{F}_0$ -可测的。固定 T , 令 $X_t^0 = X_0$,

$$X_t^{n+1} = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^n) ds, \quad t \leq T.$$

归纳地, X^n 连续适应且 $\mathbb{E}[\sup_{t \leq T} |X_t^n|^2] < \infty$ (由线性增长、Doob 不等式与等距性)。令 $g_n(t) = \mathbb{E}[\sup_{s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2]$ 。由 Doob 不等式与 Cauchy-Schwarz,

$$g_n(t) \leq 8\mathbb{E} \int_0^t |\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})|^2 ds + 2T\mathbb{E} \int_0^t |b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})|^2 ds \leq C_T \int_0^t g_{n-1}(s) ds,$$

故 $g_n(T) \leq g_0(T) \frac{(C_T T)^n}{n!}$ 。于是 $\sum_n \|\sup_{t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|\|_{L^2} < \infty$, X^n a.s. 在 $[0, T]$ 上一致收敛到连续适应过程 X 。在递推式中取极限 (随机积分项用等距性: $\mathbb{E} \int_0^T |\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s)|^2 ds \leq K^2 T \mathbb{E}[\sup |X^n - X|^2] \rightarrow 0$), X 是 $[0, T]$ 上的解。由唯一性, 不同 T 上的解相容, 粘合得 $\mathbb{R}_+$ 上的解。由构造, X 关于 X_0 与 B 生成的完备滤子适应。同样的 Gronwall 论证给出稳定性估计: 若 X, X' 是初值 $X_0, X'_0 \in L^2$ 的解, 则

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} |X_t - X'_t|^2\right] \leq C_T \mathbb{E}|X_0 - X'_0|^2. \quad (15.1)$$

对一般的 $\mathcal{F}_0$ -可测 X_0 , 令 $A_M = \{|X_0| \leq M\} \in \mathcal{F}_0$, $X^{(M)}$ 为初值 $X_0 \mathbf{1}_{A_M}$ 的解。由引理 12.8 ($s=0$), $\mathbf{1}_{A_M} X^{(M')}$ 与 $\mathbf{1}_{A_M} X^{(M)}$ ($M < M'$) 都满足以 $\mathbf{1}_{A_M} X_0$ 为初值的方程中乘以 $\mathbf{1}_{A_M}$ 后的等式, 由唯一性的证明 (在 A_M 上作同样的估计) 它们在 A_M 上相同; 于是 $X = \lim_M X^{(M)}$ 是解。

(3) 可测泛函。在典范空间 $W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ (Wiener 测度, 坐标过程 w , 完备化的自然滤子) 上, 对每个 $z \in \mathbb{R}^d$, 由 (2) 得到从 z 出发的解 Φ^z , 它是 W 上 (a.e. 定义的) 可测映射 $W \rightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ 。

迁移: 设 B 是某个带滤子概率空间上的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, 则 $\Phi^z(B)$ 是该空间上从 z 出发的解。事实上, $\Phi^z(B)_t$ 关于 $\sigma(B_s, s \leq t)$ 的完备化可测 (W -零集的原像是 $\mathbb{P}$ -零集), 从而适应; 由命题 12.10, 存在确定的子列 n_k , 使 W 上随机积分 $\int_0^t \sigma(s, \Phi_{n_k}^z) dw_s$ 是 Riemann 和 $R_{n_k}(w)$ 的 a.s. 极限; 而在原空间上 $R_{n_k}(B)$ 依概率收敛到 $\int_0^t \sigma(s, \Phi^z(B)_s) dB_s$, 又因 B 的分布是 Wiener 测度而 a.s. 收敛到 $(\lim R_{n_k})(B)$, 故二者相等。方程的其余各项显然对应。由路径唯一性, 原空间上从 z 出发的解就是 $\Phi^z(B)$ 。

联合可测性: 对 $x \in \mathbb{R}^d$ 令 $x_k = 2^{-k} \lfloor 2^k x \rfloor$ (逐分量), $F_k(x, w) = \Phi^{x_k}(w)$; 由于 $x \mapsto x_k$ 取可数个数且在 Borel 集上为常数, F_k 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(W)$ -可测的。令 $F(x, w) = \lim_k F_k(x, w)$ (在 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ 的局部一致拓扑中, 极限存在的集合是可测的), 极限不存在时令 $F(x, w) = 0$ 。

结论: 设 X_0 是 $\mathcal{F}_0$ -可测的, X 为从 X_0 出发的解。初值 $(X_0)_k$ 取可数个数, 由迁移与引理 12.8 (在每个 $\mathcal{F}_0$ -事件 $\{(X_0)_k = z\}$ 上), 从 $(X_0)_k$ 出发的解是 $F_k(X_0, B)$ 。由稳定性估计 (15.1) (先限制在 A_M 上), $\mathbb{E}[\sup_{t \leq T} |F_k(X_0, B)_t - X_t|^2 \mathbf{1}_{A_M}] \leq C_T d 4^{-k}$, 可和, 故 a.s. $F_k(X_0, B) \rightarrow X$ 局部一致, 即 $X = F(X_0, B)$ 。特别地从 x 出发的解是 $F(x, B)$, 其分布是 W 在 $F(x, \cdot)$ 下的像, 只依赖于 x : 依分布唯一性成立。

命题 15.4

在假设 (L) 下, 设 σ, b 不依赖于 t , 记 $X^x = F(x, B)$ 。则对每个 T 存在 C_T 使

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} |X_t^x - X_t^y|^2\right] \leq C_T |x - y|^2, \quad \mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} |X_t^x - x|^2\right] \leq C_T T(1 + |x|^2), \quad (15.2)$$

且 $\mathbb{E}[(1 + |X_t^x|^2)^{-1}] \leq (1 + |x|^2)^{-1} e^{C_T t}$ ($t \leq T$)。

证明 第一式：与唯一性证明相同，但用 Doob 不等式， $g(t) = \mathbb{E}[\sup_{s \leq t} |X_s^x - X_s^y|^2] \leq 3|x - y|^2 + C \int_0^t g$, Gronwall (先停止使 g 有界)。第二式： $\mathbb{E}[\sup_{s \leq t} |X_s^x - x|^2] \leq C \int_0^t \mathbb{E}[1 + |X_s^x|^2] ds$, 而 $\mathbb{E}[\sup_{s \leq T} |X_s^x|^2] \leq C(1 + |x|^2)$ (同样由 Gronwall)。第三式：令 $\phi(y) = (1 + |y|^2)^{-1}$, 则 $\nabla \phi = -2y\phi^2$, $D^2\phi = -2\phi^2 I + 8\phi^3 yy^\top$, 由线性增长 $|\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma\sigma^\top D^2\phi) + b \cdot \nabla \phi| \leq C\phi$ 。由 Itô 公式 (随机积分项的被积函数有界, 是鞅), $\mathbb{E}\phi(X_t^x) \leq \phi(x) + C \int_0^t \mathbb{E}\phi(X_s^x) ds$, 用 Gronwall。

15.3 解的马氏性

定理 15.5

在假设 (L) 下, 设 σ, b 不依赖于 t 。令 $Q_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)]$ 。则 (Q_t) 是 Feller 半群; 对任何解 X (关于任何 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动), X 是以 (Q_t) 为转移半群的 $(\mathcal{F}_t)$ -马氏过程。生成元 L 满足 $C_c^2(\mathbb{R}^d) \subset D(L)$, 且对 $f \in C_c^2$,

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \partial_{ij} f(x) + \sum_i b_i(x) \partial_i f(x), \quad a = \sigma\sigma^\top.$$



证明 马氏性。固定 s 。 $\tilde{B}_t = B_{s+t} - B_s$ 是关于 $(\mathcal{F}_{s+t})$ 的布朗运动, 与 $\mathcal{F}_s$ 独立; $\tilde{X}_t = X_{s+t}$ 满足 $\tilde{X}_t = X_s + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_u) d\tilde{B}_u + \int_0^t b(\tilde{X}_u) du$ (随机积分的时间平移由 Riemann 和逼近得到)。由定理 15.3(3), $\tilde{X} = F(X_s, \tilde{B})$ 。由冻结引理 5.5, $\mathbb{E}[f(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(F(y, \tilde{B})_t)]|_{y=X_s} = Q_t f(X_s)$ 。半群性质由此推出 (取 $X = X^x$ 并取期望); $(t, x) \mapsto Q_t f(x)$ 的可测性由 F 的可测性。

Feller 性质。设 $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ 。由 (15.2), $X_t^y \rightarrow X_t^x$ 于 $L^2(y \rightarrow x)$, 故 $Q_t f$ 连续。由命题 15.4 的第三式与 Markov 不等式, $\mathbb{P}(|X_t^x| \leq R) \leq (1+R^2)(1+|x|^2)^{-1} e^{C_T R^2}$, 于是 $Q_t f(x) \rightarrow 0 (|x| \rightarrow \infty)$, 且这对 $t \leq T$ 一致成立。强连续性: 给定 $\varepsilon > 0$, 取 A 使 $|f| \leq \varepsilon$ 于 $\{|y| \geq A/2\}$ 且 $\sup_{t \leq 1, |x| \geq A} |Q_t f(x)| \leq \varepsilon$ (由上面的一致估计, 增大 A), 则对 $|x| \geq A$, $|Q_t f(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$; 对 $|x| \leq A$, $|Q_t f(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta) + 2\|f\| \mathbb{P}(|X_t^x - x| > \delta) \leq \omega_f(\delta) + 2\|f\| C_1 t(1+A^2)/\delta^2$ (ω_f 为连续模)。

生成元。对 $f \in C_c^2$, 由 Itô 公式, $f(X_t^x) = f(x) + \int_0^t \nabla f(X_s^x)^\top \sigma(X_s^x) dB_s + \int_0^t Lf(X_s^x) ds$, 随机积分的被积函数有界, 故 $Q_t f - f = \int_0^t Q_s Lf ds$ 。 $Lf \in C_c \subset C_0$, 由强连续性 $\|\frac{1}{t}(Q_t f - f) - Lf\| \leq \sup_{s \leq t} \|Q_s Lf - Lf\| \rightarrow 0$ 。

命题 15.6 (扩散的 Dirichlet 问题)

在定理 15.5 的条件下, 设 D 为有界区域, X 是从 $x \in D$ 出发的解, $T = \inf\{t : X_t \notin D\}$ 满足 $\mathbb{E}_x[T] < \infty$ 。若 $u \in C^2$ (在 $\bar{D}$ 的邻域上) 满足 $Lu = -f$ 于 D (f 有界连续), 则

$$u(x) = \mathbb{E}_x \left[u(X_T) + \int_0^T f(X_s) ds \right].$$

特别地 (u 满足 $Lu = -1$, $u = 0$ 于 ∂D), $\mathbb{E}_x[T] = u(x)$ 。



证明 由 Itô 公式 (u 修改为 C_c^2 函数), $u(X_{t \wedge T}) - u(x) - \int_0^{t \wedge T} Lu(X_s) ds$ 是随机积分, 被积函数 $\nabla u^\top \sigma$ 在 $\bar{D}$ 上有界, 故是鞅。取期望, 令 $t \rightarrow \infty$ ($\mathbb{E}T < \infty$, 控制收敛)。

例如对 d 维布朗运动 ($L = \frac{1}{2}\Delta$) 与球 $B(0, r)$, $u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{d}$ 给出 $\mathbb{E}_x[T] = \frac{r^2 - |x|^2}{d}$, 推广了命题 14.4。

15.4 一维情形的路径唯一性

定理 15.7 (Yamada-Watanabe)

设 $d = m = 1$, b Lipschitz, 且存在不减函数 $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $h(0) = 0$, $\int_{0+} h(u)^{-2} du = \infty$, 使 $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq h(|x - y|)$ 。则 $E(\sigma, b)$ 有路径唯一性。例如 σ 是 $\frac{1}{2}$ -Hölder 连续的 ($h(u) = c\sqrt{u}$)。



证明 取 $1 > a_1 > a_2 > \dots \downarrow 0$ 使 $\int_{a_n}^{a_{n-1}} h(u)^{-2} du = n$ ($a_0 = 1$)。取连续函数 $\rho_n \geq 0$, 支撑于 (a_n, a_{n-1}) , $\int \rho_n = 1$, $\rho_n(u) \leq \frac{2}{nh(u)^2}$ 。令 $\psi_n(x) = \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_n(u) du dy$, 则 $\psi_n \in C^2$, $|\psi'_n| \leq 1$, $\psi_n(x) \uparrow |x|$, $\psi''_n(x) = \rho_n(|x|)$ 。

设 X, X' 为两个解, $X_0 = X'_0$, $\Delta = X - X'$ 。由 Itô 公式,

$$\psi_n(\Delta_t) = \int_0^t \psi'_n(\Delta_s)(\sigma(X_s) - \sigma(X'_s))dB_s + \int_0^t \psi'_n(\Delta_s)(b(X_s) - b(X'_s))ds + \frac{1}{2} \int_0^t \rho_n(|\Delta_s|)(\sigma(X_s) - \sigma(X'_s))^2 ds.$$

最后一项 $\leq \frac{1}{2} \int_0^t \frac{2}{nh(|\Delta_s|)^2} h(|\Delta_s|)^2 ds \leq t/n$ 。停止于 $\tau_M = \inf\{t : |X_t| + |X'_t| \geq M\}$ (随机积分成为鞅) 并取期望: $\mathbb{E}[\psi_n(\Delta_{t \wedge \tau_M})] \leq K \int_0^t \mathbb{E}[|\Delta_{s \wedge \tau_M}|] ds + t/n$ 。由于 $\psi_n(x) \geq |x| - a_{n-1}$, 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $\mathbb{E}|\Delta_{t \wedge \tau_M}| \leq K \int_0^t \mathbb{E}|\Delta_{s \wedge \tau_M}| ds$, 由 Gronwall, $\mathbb{E}|\Delta_{t \wedge \tau_M}| = 0$ 。令 $M \rightarrow \infty$ 并用连续性。

15.5 例子

例 15.1 (Ornstein-Uhlenbeck 过程) 方程 $dX_t = dB_t - \lambda X_t dt$ ($\lambda > 0$) 的解为 $X_t = e^{-\lambda t} X_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s$ (由分部积分验证 $e^{\lambda t} X_t = X_0 + \int_0^t e^{\lambda s} dB_s$)。若 $X_0 = x$, 则 $X_t \sim \mathcal{N}(e^{-\lambda t} x, \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda})$ (Wiener 积分是高斯的, 第 9 章)。 $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2\lambda})$ 是平稳分布: 若 X_0 服从它且与 B 独立, 则每个 X_t 都服从它。

例 15.2 (几何布朗运动) 方程 $dX_t = \sigma X_t dB_t + r X_t dt$ 的解为 $X_t = X_0 \exp(\sigma B_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t)$ (Itô 公式验证)。 $r = 0$ 时它是指数鞅 $X_0 \mathcal{E}(\sigma B)_t$ 。这是 Black-Scholes 模型中的股价过程。

例 15.3 (Bessel 过程) 设 $d \geq 2$ 为整数, B 为从 $x \neq 0$ 出发的 d 维布朗运动, $\rho_t = |B_t|$ 。由定理 14.14, B 不击中 0, 可以对 $|\cdot|$ (在 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上光滑) 用 Itô 公式:

$$\rho_t = |x| + \beta_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{\rho_s}, \quad \beta_t = \int_0^t \frac{B_s}{|B_s|} \cdot dB_s.$$

$\langle \beta \rangle_t = t$, 由 Lévy 定理 β 是布朗运动。 ρ 称为 d 维 Bessel 过程。其平方 $Y = \rho^2$ 满足

$$dY_t = 2\sqrt{Y_t} d\beta_t + d dt.$$

系数 $2\sqrt{|y|}$ 是 $\frac{1}{2}$ -Hölder 的, 由定理 15.7, 此方程有路径唯一性。对任意实数 $\delta \geq 0$, 方程 $dY_t = 2\sqrt{|Y_t|} d\beta_t + \delta dt$ 的非负解称为 δ 维平方 Bessel 过程 (其弱存在性可以用连续系数 SDE 的一般存在定理得到, 本讲义不证明)。

15.6 一维扩散的尺度函数

命题 15.8 (尺度函数)

设 $I = (l, r)$ ($-\infty \leq l < r \leq \infty$), σ, b 在 I 上连续, $\sigma > 0$ 于 I 。设 $[a, b'] \subset I$, $x \in (a, b')$, X 是连续适应过程, $X_0 = x$, $T = \inf\{t : X_t \notin (a, b')\}$, 且 $X_{t \wedge T} = x + \int_0^{t \wedge T} \sigma(X_s) dB_s + \int_0^{t \wedge T} b(X_s) ds$ (即 X 在离开 (a, b') 之前解方程 $dX = \sigma(X) dB + b(X) dt$; 系数只需在 I 上定义)。取 $c \in I$, 令

$$s(y) = \int_c^y \exp\left(-\int_c^z \frac{2b(u)}{\sigma(u)^2} du\right) dz \quad (\text{尺度函数}).$$

则 $T < \infty$ a.s., 且 $\mathbb{P}(X_T = a) = \frac{s(b') - s(x)}{s(b') - s(a)}$ 。

证明 $s \in C^2(I)$, $s' > 0$, $\frac{1}{2}\sigma^2 s'' + bs' = 0$ 。由 Itô 公式 (把 s 在 $[a, b']$ 的邻域外修改为 $C^2(\mathbb{R})$ 函数), $Y_t = s(X_{t \wedge T})$ 是连续局部鞅, 取值于 $[s(a), s(b')]$, 从而是有界鞅, $\langle Y \rangle_t = \int_0^{t \wedge T} s'(X_u)^2 \sigma(X_u)^2 du \geq \kappa(t \wedge T)$, 其中 $\kappa = \min_{[a, b']} (s' \sigma)^2 > 0$ 。由命题 11.7(2), $\mathbb{E}[\langle Y \rangle_\infty] = \mathbb{E}[(Y_\infty - Y_0)^2] < \infty$, 故 $\mathbb{E}T < \infty$ 。由可选停止, $s(x) = \mathbb{E}[s(X_T)] = s(a)p + s(b')(1-p)$, $p = \mathbb{P}(X_T = a)$ 。

例 15.4 (平方 Bessel 过程何时击中 0) 设 $\delta \geq 0$, Y 是方程 $dY_t = 2\sqrt{|Y_t|} d\beta_t + \delta dt$ 的解, $Y_0 = y > 0$ 。在 $I = (0, \infty)$ 上 $\sigma(u) = 2\sqrt{u}$, $b = \delta$, $s'(z) = z^{-\delta/2}$ (取 $c = 1$)。对 $0 < a < y < b'$,

$$\mathbb{P}_y(T_a < T_{b'}) = \frac{s(b') - s(y)}{s(b') - s(a)}.$$

- 若 $\delta \geq 2$, $s(0+) = -\infty$, 令 $a \downarrow 0$ 得 $\mathbb{P}_y(T_0 < T_{b'}) = 0$ 对一切 b' 成立 ($T_0 = \lim_{a \downarrow 0} T_a$), 故 Y 永不击中 0.
- 若 $\delta < 2$, $s(0+)$ 有限而 $s(\infty) = \infty$, 令 $a \downarrow 0$ 再令 $b' \rightarrow \infty$, 得 $\mathbb{P}_y(T_0 < \infty) = 1$.
- 若 $\delta > 2$, $s(\infty) < \infty$, 令 $b' \rightarrow \infty$ 得 $\mathbb{P}_y(T_a < \infty) = (a/y)^{\delta/2-1} < 1$, 且 (如定理 14.14(3)) $Y_t \rightarrow \infty$ a.s.

当 $\delta = d$ 为整数时, $Y = |B|^2$ (例 15.3), 这再次给出: $d \geq 2$ 维布朗运动不击中点, $d \geq 3$ 时暂留, 且 $\mathbb{P}_x(T_{B(0,r)} < \infty) = (r/|x|)^{d-2}$, 与命题 14.13 一致。

15.7 弱解与 Girsanov 变换

定理 15.9

设 $b: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 有界可测, $T > 0$. 则方程 $dX_t = dB_t + b(t, X_t)dt$ ($t \leq T$) 对每个初值 x 都有弱解, 且依分布唯一: 任何解 X 在 $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ 上的分布为

$$\mathbb{P}(X \in dw) = \exp \left(\int_0^T b(s, w_s) \cdot dw_s - \frac{1}{2} \int_0^T |b(s, w_s)|^2 ds \right) W_x(dw),$$

其中 W_x 为从 x 出发的 Wiener 测度, $\int b \cdot dw$ 是典范空间上的随机积分。



证明 存在性. 设 W 是从 x 出发的 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, $L_t = \int_0^{t \wedge T} b(s, W_s) \cdot dW_s$. $\langle L \rangle_\infty \leq \|b\|_\infty^2 T$, 由 Novikov 判别法 12.24, $\mathcal{E}(L)$ 是一致可积鞅. 令 $d\mathbb{Q} = \mathcal{E}(L)_\infty d\mathbb{P}$. 由推论 12.23, $B_t := W_t - x - \int_0^{t \wedge T} b(s, W_s) ds$ 在 $\mathbb{Q}$ 下是布朗运动, 即 (W, B) 在 $\mathbb{Q}$ 下是解。

唯一性. 设 X 是某个空间上的解, $L'_t = -\int_0^{t \wedge T} b(s, X_s) \cdot dX_s$, $d\mathbb{R} = \mathcal{E}(L')_\infty d\mathbb{P}$. 由 Girsanov, $X_t - x = B_t + \int_0^t b(s, X_s) ds = B_t - \langle B, L' \rangle_t$ 在 $\mathbb{R}$ 下是布朗运动, 故 X 在 $\mathbb{R}$ 下的分布为 W_x . 而

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{R}} = \mathcal{E}(L')_\infty^{-1} = \exp \left(\int_0^T b(s, X_s) \cdot dX_s - \frac{1}{2} \int_0^T |b(s, X_s)|^2 ds \right),$$

其中 $\int b(s, X_s) \cdot dX_s + \int |b|^2 ds = \int b(s, X_s) \cdot dX_s$. 随机积分 $\int_0^T b(s, X_s) \cdot dX_s$ 等于典范空间上的随机积分泛函在 X 处的值: 在典范空间上用初等过程 $H^n(s, w)$ 在 $L^2(dW_x ds)$ 中逼近 $b(s, w_s)$ (命题 12.2), 初等积分是路径的显式泛函, 而由等距性 (在 $\mathbb{R}$ 下 X 是布朗运动) 两边的 L^2 极限对应. 于是 X 在 $\mathbb{P}$ 下的分布由上式给出。

注 [局部 Lipschitz 系数] 设 σ, b 只在开集 $U \subset \mathbb{R}^d$ 上 (关于 x) 局部 Lipschitz. 若某个解 X 永不离开 U , 则它的分布是唯一确定的: 取紧集 $K_n \uparrow U$ 与全局 Lipschitz 的系数 σ_n, b_n 使其在 K_n 上与 σ, b 一致; 在 X 离开 K_n 之前, X 也是 $E(\sigma_n, b_n)$ 的解, 由定理 15.3 的路径唯一性与 (3), X 在离开 K_n 之前等于 $F_n(x, B)$, 其 (停止后的) 分布由 n 与 x 决定; 令 $n \rightarrow \infty$.

命题 15.10 (三维 Bessel 过程是不击中 0 的布朗运动)

设 B 为从 $x > 0$ 出发的一维 $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动, T_0 为其首中 0 的时刻, $D_t = B_{t \wedge T_0}/x$. 对固定的 $T > 0$, 令 $d\mathbb{Q} = D_T d\mathbb{P}$ (于 $\mathcal{F}_T$ 上). 则在 $\mathbb{Q}$ 下, $T_0 > T$ a.s., 且 $(B_t)_{t \leq T}$ 满足

$$B_t = x + W_t + \int_0^t \frac{ds}{B_s},$$

W 为 $\mathbb{Q}$ -布朗运动. 因此 $(B_t)_{t \leq T}$ 在 $\mathbb{Q}$ 下与从 x 出发的三维 Bessel 过程 (例 15.3) 同分布。



证明 D 是非负鞅 (停止的布朗运动, 有界停时的可选停止), $\mathbb{E}D_T = 1$, 且 $\mathbb{Q}(T_0 \leq T) = \mathbb{E}[D_T; T_0 \leq T] = 0$. 对 $\varepsilon \in (0, x)$, 令 $R_\varepsilon = \inf\{t : B_t \leq \varepsilon\} \wedge T$, $d\mathbb{Q}_\varepsilon = D_{R_\varepsilon} d\mathbb{P}$. 由于 $D_{R_\varepsilon} \geq \varepsilon/x > 0$, $\mathbb{Q}_\varepsilon$ 与 $\mathbb{P}$ 等价, 鞅 $\mathbb{E}[D_{R_\varepsilon} | \mathcal{F}_t] = D_{t \wedge R_\varepsilon}$ 连续, 且由 Itô 公式 (对 $\log$), $D_{\cdot \wedge R_\varepsilon} = \mathcal{E}(L^\varepsilon)$, $L^\varepsilon = \int_0^{\cdot \wedge R_\varepsilon} B_s^{-1} dB_s$. 由 Girsanov 定理 12.22, $B_{t \wedge R_\varepsilon} - x - \int_0^{t \wedge R_\varepsilon} B_s^{-1} ds$ 是 $\mathbb{Q}_\varepsilon$ -连续局部鞅, 二次变差为 $t \wedge R_\varepsilon$. 由可选停止, $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{F}_{R_\varepsilon}$ 上一致, 故上述结论在 $\mathbb{Q}$ 下也成立. $\mathbb{Q}$ -a.s. $R_\varepsilon \uparrow T$ ($\varepsilon \downarrow 0$), 于是 $W_t = B_t - x - \int_0^t B_s^{-1} ds$ ($t \leq T$) 是以 (R_ε) 为约化序列的 $\mathbb{Q}$ -连续局部鞅, $\langle W \rangle_t = t$, 由 Lévy 定理 W 是 $[0, T]$ 上的布朗运动. 三维 Bessel 过程 $\rho = |B^{(3)}|$ 满足同一方程且永不击中 0; 系数 $1/y$ 在 $(0, \infty)$ 上局部 Lipschitz, 由注 15.7, 两者同分布。

这是 Doob h -变换 (第 8 章) 的连续版本: $h(x) = x$ 是被杀死于 0 的布朗运动的正调和函数, h -过程就是“以

永不击中 0 为条件”的布朗运动，它是三维 Bessel 过程。

第 16 章 局部时

Itô 公式要求函数是 C^2 的。对 $f(x) = |x - a|$ 这样的凸函数，Itô 公式中出现一个新的增过程——局部时 L_t^a ，它度量半鞅在时刻 t 之前在水平 a 附近“停留”的多少。本章用 Tanaka 公式定义局部时，证明其关于空间变量的正则性与占位时公式，并证明 Lévy 关于布朗运动局部时的定理。

本章中 $X = X_0 + M + V$ 是连续半鞅（ M 为连续局部鞅， $M_0 = 0$ ， V 为有限变差过程）， $|dV|$ 表示 V 的全变差测度。约定 $\text{sgn}(x) = \mathbf{1}_{\{x>0\}} - \mathbf{1}_{\{x\leq 0\}}$ 。

16.1 Tanaka 公式

命题 16.1

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为凸函数， f'_- 为其左导数。则存在增过程 A^f 使

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + A_t^f.$$

证明 取连续函数 $h \geq 0$ ，支撑于 $[0, 1]$ ， $\int h = 1$ ，令 $h_n(x) = nh(nx)$ ， $\varphi_n = h_n * f$ ，即 $\varphi_n(x) = \int h_n(y)f(x-y)dy$ 。则 φ_n 是 C^2 凸函数， $\varphi'_n = h_n * f'_-$ ，且 $\varphi_n \rightarrow f$ ， $\varphi'_n \rightarrow f'_-$ 逐点（ f'_- 左连续，而 $\varphi'_n(x)$ 是 f'_- 在 $[x-1/n, x]$ 上的平均）， φ'_n 在紧集上一致有界。令 $T_K = \inf\{t: |X_t| + \langle M \rangle_t + \int_0^t |dV_s| \geq K\}$ 。由 Itô 公式，

$$\varphi_n(X_{t \wedge T_K}) = \varphi_n(X_0) + \int_0^{t \wedge T_K} \varphi'_n(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T_K} \varphi''_n(X_s) d\langle M \rangle_s.$$

由随机控制收敛定理（命题 12.9），中间一项依概率收敛到 $\int_0^{t \wedge T_K} f'_-(X_s) dX_s$ 。因此最后一项（关于 t 不减）依概率收敛到 $A_t^K := f(X_{t \wedge T_K}) - f(X_0) - \int_0^{t \wedge T_K} f'_-(X_s) dX_s$ ，后者连续，故 A^K 是增过程。 $A^K = (A^{K'})^{T_K}$ （ $K \leq K'$ ），令 $K \rightarrow \infty$ 即得 A^f 。

定理 16.2 (Tanaka 公式)

对每个 $a \in \mathbb{R}$ ，存在增过程 $L^a = (L_t^a)_{t \geq 0}$ （称为 X 在 a 处的局部时），使

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \text{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a, \quad (16.1)$$

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a, \quad (16.2)$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a. \quad (16.3)$$

并且 a.s. 测度 $d_s L_s^a$ 支撑于 $\{s: X_s = a\}$ ；对停时 T ， X^T 的局部时为 $(L^a)^T$ 。

证明 对凸函数 $|x - a|$ （左导数 $\text{sgn}(x - a)$ ）用命题 16.1 定义 L^a ，得 (16.1)。对 $(x - a)^+$ 与 $(x - a)^-$ （左导数分别为 $\mathbf{1}_{\{x > a\}}$ 与 $-\mathbf{1}_{\{x \leq a\}}$ ）得到增过程 A^+ ， A^- 。两式相减 $((x - a)^+ - (x - a)^- = x - a)$ 得 $A^+ = A^-$ ；相加并与 (16.1) 比较得 $A^+ + A^- = L^a$ 。

支撑性：令 $W = |X - a|$ 。由 (16.1)， $\langle W \rangle = \langle X \rangle$ 。对 W^2 用 Itô 公式： $(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t W_s \text{sgn}(X_s - a) dX_s + 2 \int_0^t W_s dL_s^a + \langle X \rangle_t$ 。与直接对 $(X_t - a)^2$ 用 Itô 公式比较（ $W \text{sgn}(X - a) = X - a$ ），得 $\int_0^t |X_s - a| dL_s^a = 0$ 。最后一个论断由 $\int_0^{t \wedge T} \text{sgn}(X_s - a) dX_s = \int_0^t \text{sgn}(X_s^T - a) dX_s^T$ 。

16.2 局部时的正则性与占位时公式

对 $a \in \mathbb{R}$, 令 $Y_t^a = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dM_s$, $Z_t^a = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dV_s$. 由 (16.2),

$$L_t^a = 2((X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - Y_t^a - Z_t^a). \quad (16.4)$$

引理 16.3

(1) 对 $p \geq 1$, 存在常数 C_p 使对一切 $a < b$,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{a < X_s \leq b\}} d\langle M \rangle_s \right)^p \right] \leq C_p (b-a)^p \left(\mathbb{E}[\langle M \rangle_t^{p/2}] + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t |dV_s| \right)^p \right] \right).$$

(2) 过程 $a \mapsto Y^a$ (取值于 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, 配局部一致拓扑) 有连续修正。

证明 (1) 由平移, 只需对 $a = -u$, $b = u$ 证明. 令 f 为满足 $f''(x) = (2 - |x|/u)^+$, $f(0) = f'(0) = 0$ 的 C^2 函数; 则 $|f'| \leq 2u$, $f'' \geq \mathbf{1}_{[-u, u]}$. 由 Itô 公式, $\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t f'(X_s) dM_s - \int_0^t f'(X_s) dV_s$. 由 f 的 $2u$ -Lipschitz 性、BDG 不等式 (定理 12.18), 右边各项的 p 阶矩都被 $C_p(2u)^p (\mathbb{E}[\langle M \rangle_t^{p/2}] + \mathbb{E}[(\int_0^t |dV|)^p])$ 控制.

(2) 固定 $p > 2$, $T_n = \inf\{t : \langle M \rangle_t + \int_0^t |dV_s| \geq n\}$. 由 BDG 与 (1) (应用于 X^{T_n}),

$$\mathbb{E} \left[\sup_s |Y_{s \wedge T_n}^b - Y_{s \wedge T_n}^a|^p \right] \leq C_p \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{T_n} \mathbf{1}_{\{a < X_s \leq b\}} d\langle M \rangle_s \right)^{p/2} \right] \leq C'_p (n^{p/4} + n^{p/2}) (b-a)^{p/2}.$$

由于 $p/2 > 1$, Kolmogorov 准则 9.11 (取值于完备度量空间 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$; 在 a 的每个有界区间上) 给出 $a \mapsto (Y_{s \wedge T_n}^a)_s$ 的连续修正 $Y^{(n), a}$. 对 $n < m$, $Y_{\cdot \wedge T_n}^{(m), a} = Y^{(n), a}$ 对每个 a a.s. 成立, 由连续性对一切 a 同时成立; 因此可以粘合成 $a \mapsto Y^a$ 的连续修正.

定理 16.4 (局部时的正则性)

$a \mapsto L^a$ (取值于 $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$) 有一个 càdlàg 修正, 对它有

$$L_t^a - L_t^{a-} = 2 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = a\}} dV_s.$$

特别地, 若 X 是连续局部鞅, 则 $(a, t) \mapsto L_t^a$ 有联合连续的修正.

证明 在 (16.4) 中用 Y^a 的连续修正. $a \mapsto Z_t^a = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dV_s$ 对每个 ω 是 càdlàg 的 (控制收敛: $a_n \downarrow a$ 时 $\mathbf{1}_{\{x > a_n\}} \uparrow \mathbf{1}_{\{x > a\}}$; $a_n \uparrow a$ 时 $\rightarrow \mathbf{1}_{\{x \geq a\}}$), 并且关于 t 局部一致, $Z_t^{a-} - Z_t^a = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = a\}} dV_s$. 代入 (16.4) 即得.

从现在起总使用这个修正. 由引理 16.3(1) (令 $b - a \rightarrow 0$), 对每个 a , $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = a\}} d\langle M \rangle_s = 0$ a.s.

定理 16.5 (占位时公式)

a.s. 对一切 $t \geq 0$ 与一切非负可测 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^t \varphi(X_s) d\langle M \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a da.$$

证明 设 $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, 令 $g(x) = \int \varphi(a)(x-a)^+ da$, 则 $g \in C^2$, $g'(x) = \int \varphi(a) \mathbf{1}_{\{x > a\}} da$, $g'' = \varphi$. 把 (16.2) 乘以 $\varphi(a)$ 并对 a 积分:

$$g(X_t) = g(X_0) + \int \varphi(a) Y_t^a da + \int \varphi(a) Z_t^a da + \frac{1}{2} \int \varphi(a) L_t^a da.$$

由 Fubini, $\int \varphi(a) Z_t^a da = \int_0^t g'(X_s) dV_s$. 由于 $a \mapsto Y_t^a$ 连续, $\int \varphi(a) Y_t^a da$ 是 Riemann 和 $\sum_i \varphi(a_i) Y_t^{a_i} \Delta a_i = \int_0^t k_n(X_s) dM_s$ 的极限, 其中 $k_n(x) = \sum_i \varphi(a_i) \mathbf{1}_{\{x > a_i\}} \Delta a_i$ 一致有界且逐点收敛到 $g'(x)$; 由随机控制收敛定理, 后者依概率收敛到 $\int_0^t g'(X_s) dM_s$. 与 Itô 公式 $g(X_t) = g(X_0) + \int_0^t g'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(X_s) d\langle M \rangle_s$ 比较, 得等式对固定的 t 与 φ a.s. 成立. 两边关于 t 连续, 取 C_c 中的可数稠密族, 得 a.s. 对一切 t 与一切 $\varphi \in C_c$ 成立; 这说明 $\mathbb{R}$ 上的两个测度 $A \mapsto \int_0^t \mathbf{1}_A(X_s) d\langle M \rangle_s$ 与 $A \mapsto \int_A L_t^a da$ 相等 (命题 1.14 与引理 4.9 的论证), 即得一般的 φ .

推论 16.6

a.s. 对一切 a 与 t , $L_t^a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{a \leq X_s < a+\varepsilon\}} d\langle M \rangle_s$ 。若 X 是连续局部鞅, 还有 $L_t^a = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|X_s - a| < \varepsilon\}} d\langle X \rangle_s$ 。



证明 由占位时公式, 右边等于 $\frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} L_t^b db$, 由右连续性趋于 L_t^a ; 局部鞅情形用联合连续性。

定理 16.7 (广义 Itô 公式)

设 f 是两个凸函数之差, f'' 表示其 (在每个有界区间上为有限的) 二阶导数测度。则

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da).$$



证明 由线性, 设 f 凸。用 $T_K = \inf\{t : |X_t| \geq K\}$ 停止, 只需考虑 X 取值于 $[-K, K]$ 的情形。在 $[-K, K]$ 上, $f(x) = \alpha + \beta x + \int_{(-K, K)} (x-a)^+ \mu(da)$, 其中 $\mu = f''|_{(-K, K)}$ 是有限测度, $f'_-(x) = \beta + \mu((-K, x))$ 。把 (16.2) 对 $\mu(da)$ 积分, 用与上一证明相同的论证 ($a \mapsto Y_t^a$ 连续, $\int Y_t^a \mu(da)$ 是 Riemann-Stieltjes 和的极限, 相应的被积函数 $\sum_i \mathbf{1}_{\{x > a_i\}} \mu((a_{i-1}, a_i])$ 一致有界并逐点收敛到 $\mu((-K, x))$) 即得。

16.3 布朗运动的局部时

设 B 为一维布朗运动, $B_0 = 0$, L_t^a 为其 (联合连续的) 局部时。由占位时公式, $\int_0^t \varphi(B_s) ds = \int \varphi(a) L_t^a da$: L_t 是 B 在 $[0, t]$ 上的占位测度关于 Lebesgue 测度的密度 (Trotter 定理)。

引理 16.8 (Skorokhod)

设 $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $y(0) \geq 0$ 。则存在唯一一对连续函数 (z, ℓ) , 使 $z = y + \ell \geq 0$, ℓ 不减, $\ell(0) = 0$, 且 ℓ 只在 $\{s : z(s) = 0\}$ 上增长 (即 $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{z(s) > 0\}} d\ell(s) = 0$)。并且 $\ell(t) = \sup_{s \leq t} (-y(s)) \vee 0$ 。



证明 存在性: 令 $\ell(t) = \sup_{s \leq t} (-y(s)) \vee 0$, 则 $z = y + \ell \geq 0$; 若 $z(t) > 0$, 则 $\ell(t) > -y(t)$, 由连续性 ℓ 在 t 的邻域内为常数。唯一性: 若 (z', ℓ') 也满足要求, 则 $z - z' = \ell - \ell'$ 连续有界变差, $0 \leq (z - z')^2(t) = 2 \int_0^t (z - z') d(\ell - \ell') = -2 \int_0^t z' d\ell - 2 \int_0^t z d\ell' \leq 0$ (利用 $\int z d\ell = \int z' d\ell' = 0$)。

定理 16.9 (Lévy)

令 $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ 。则 $\beta_t = \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s$ 是布朗运动, $|B_t| = \beta_t + L_t^0$, 且 $L_t^0 = \sup_{s \leq t} (-\beta_s)$ 。因此过程 $(|B_t|, L_t^0)_{t \geq 0}$ 与 $(S_t - B_t, S_t)_{t \geq 0}$ 同分布。特别地, 对每个 t , $L_t^0 \stackrel{(d)}{=} S_t \stackrel{(d)}{=} |B_t|$, 且 $L_\infty^0 = \infty$ a.s.



证明 $\langle \beta \rangle_t = \int_0^t \text{sgn}(B_s)^2 ds = t$, 由 Lévy 定理 12.14, β 是布朗运动。由 Tanaka 公式 (16.1), $|B| = \beta + L^0$, L^0 只在 $\{|B| = 0\}$ 上增长。由 Skorokhod 引理, $L_t^0 = \sup_{s \leq t} (-\beta_s)$ ($\beta_0 = 0$, 故 $\vee 0$ 多余)。令 $W = -\beta$ (布朗运动), 则 $(|B|, L^0) = (\sup_{s \leq \cdot} W_s - W, \sup_{s \leq \cdot} W_s)$, 它与 $(S - B, S)$ 同分布, 因为它是同一个确定性泛函作用在两个布朗运动上。最后由反射原理 9.21 与 $\sup_t B_t = \infty$ (推论 9.17)。

推论 16.10

a.s. 布朗运动的零点集 $\mathcal{Z} = \{t : B_t = 0\}$ 是 Lebesgue 测度为零的闭集, 没有孤立点, 且无界。



证明 $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{B_s=0\}} ds = \int \mathbf{1}_{\{0\}}(a) L_\infty^a da = 0$ (占位时公式)。无界性由推论 9.17。无孤立点: 对有理数 $q \geq 0$, $d_q = \inf\{t > q : B_t = 0\}$ 是有限停时, $B_{d_q} = 0$ 。由强马氏性, $B^{(d_q)}$ 是布朗运动; 由推论 9.17, 它在每个 $(0, \varepsilon)$ 中既取正值又取负值, 从而 (介值定理) 有零点。故 a.s. 对一切有理 q , d_q 是 $\mathcal{Z}$ 中从右边被逼近的点。若 $t > 0$ 是 $\mathcal{Z}$ 的孤立点, 取有理数 $q < t$ 使 $(q, t) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, 则 $t = d_q$, 矛盾; $t = 0$ 的情形直接由推论 9.17。

注 Le Gall GTM 274 第 9 章还证明了局部时的下穿逼近 ($L_t^0 = \lim \varepsilon \cdot \#\{[0, t] \text{ 中从 } \varepsilon \text{ 下穿到 } 0 \text{ 的次数}\}$) 以及

Kallianpur–Robbins 定律 (平面布朗运动在有界集中停留时间的对数标度极限)。这些结果可以用本章的工具证明, 这里不再展开。

16.4 应用: Lévy 的反正弦律

作为广义 Itô 公式与 Feynman–Kac 思想的应用, 我们计算布朗运动在正半轴上停留时间的分布。

引理 16.11

设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, f' 绝对连续且其导数 f'' (几乎处处定义) 局部有界。则对连续半鞅 X , $f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$ (f'' 在零测集上的取值无关紧要)。



证明 $f'' = g^+ - g^-$, 令 $f_{\pm}$ 为 $f'_{\pm} = g^{\pm}$ 的 C^1 函数 ($f'_{\pm}(x) = \int_0^x g^{\pm}$), 它们凸, $f = f_+ - f_-$ 为仿射函数。由定理 16.7 (此时二阶导数测度为 $g^{\pm}(a)da$) 与占位时公式 16.5, $\frac{1}{2} \int L_t^a g^{\pm}(a) da = \frac{1}{2} \int_0^t g^{\pm}(X_s) d\langle X \rangle_s$ 。改变 f'' 在 Lebesgue 零集 Z 上的值不影响结果, 因为由占位时公式 $\int_0^t \mathbf{1}_Z(X_s) d\langle X \rangle_s = \int_Z L_t^a da = 0$ 。

定理 16.12 (Lévy 反正弦律)

设 B 为一维布朗运动, $B_0 = 0$, $A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s > 0\}} ds$ 。则对每个 $t > 0$, A_t/t 服从反正弦分布:

$$\mathbb{P}(A_t \leq ut) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{u}, \quad u \in [0, 1],$$

即其密度为 $\frac{1}{\pi \sqrt{u(1-u)}}$ 。



证明 第一步: 预解的计算。固定 $\mu, \lambda > 0$, 令 $\alpha = \sqrt{2(\mu + \lambda)}$, $\beta = \sqrt{2\mu}$, 定义

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu + \lambda} + p e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{\mu} + q e^{\beta x}, & x < 0, \end{cases}$$

其中常数 p, q 由 v 与 v' 在 0 处连续确定: $\frac{1}{\mu + \lambda} + p = \frac{1}{\mu} + q$, $-\alpha p = \beta q$ 。则 v 有界, $v \in C^1$, v'' 在 $x \neq 0$ 处存在且有界, 并满足

$$\frac{1}{2} v''(x) - (\mu + \lambda \mathbf{1}_{\{x > 0\}}) v(x) = -1 \quad (x \neq 0). \quad (16.5)$$

解出 $p = \frac{\lambda \beta}{\mu(\mu + \lambda)(\alpha + \beta)}$, 代入化简得 $v(0) = \frac{1}{\mu + \lambda} + p = \frac{1}{\sqrt{\mu(\mu + \lambda)}}$ 。

第二步: Feynman–Kac。令 $E_t = \exp(-\mu t - \lambda A_t)$, $Y_t = E_t v(B_t) + \int_0^t E_s ds$ 。由引理 16.11 与分部积分 (E 是有限变差过程),

$$dY_t = E_t v'(B_t) dB_t + E_t \left(\frac{1}{2} v''(B_t) - (\mu + \lambda \mathbf{1}_{\{B_t > 0\}}) v(B_t) + 1 \right) dt = E_t v'(B_t) dB_t,$$

其中用到 (16.5) 与 $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{B_t = 0\}} dt = 0$ 。 v' 有界, 故 Y 是鞅, $v(0) = \mathbb{E}[Y_t]$ 。令 $t \rightarrow \infty$ ($|E_t v(B_t)| \leq e^{-\mu t} \|v\|_\infty$), 得

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} \mathbb{E}[e^{-\lambda A_t}] dt = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty E_t dt \right] = \frac{1}{\sqrt{\mu(\mu + \lambda)}}.$$

第三步: 识别分布。设 Z 服从反正弦分布。由 $\int_0^\infty e^{-as} s^{-1/2} ds = \sqrt{\pi/a}$ 与 Fubini,

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} \mathbb{E}[e^{-\lambda t Z}] dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^t \frac{e^{-\lambda s} ds}{\pi \sqrt{s(t-s)}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-(\mu + \lambda)s}}{\sqrt{s}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\mu r}}{\sqrt{r}} dr = \frac{1}{\sqrt{\mu(\mu + \lambda)}}.$$

函数 $t \mapsto \mathbb{E}[e^{-\lambda A_t}]$ 与 $t \mapsto \mathbb{E}[e^{-\lambda t Z}]$ 有界连续, Laplace 变换在一切 $\mu \in \mathbb{N}^*$ 处相等, 由命题 2.14(3), 二者相等。于是对每个 t , A_t 与 tZ 的 Laplace 变换在一切 $\lambda \in \mathbb{N}^*$ 处相等, 由命题 2.14(2), $A_t \stackrel{(d)}{=} tZ$ 。

推论 16.13 (随机游走的反正弦律)

在定理 10.18 的条件下, $\int_0^1 \mathbf{1}_{\{S_t^{(n)} > 0\}} dt$ 依分布收敛到反正弦分布。



证明 $\Psi(w) = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{w(t) > 0\}} dt$ 在满足 $\int_0^1 \mathbf{1}_{\{w(t) = 0\}} dt = 0$ 的 w 处连续 (控制收敛), 而由 Fubini, 布朗运动 a.s. 满足此条件。用引理 10.19 与定理 16.12。

注 最后零点 g_1 (命题 9.26)、 A_1 以及 $[0, 1]$ 上最大值的达到时刻都服从反正弦分布 (第三个由 Lévy 定理 16.9 与最后零点的结论推出)。反正弦分布在 0 与 1 附近密度最大: 布朗运动倾向于把大部分时间花在同一侧——这与“公平博弈中领先者频繁交替”的直觉相反。由推论 16.13, 同样的结论对随机游走渐近成立。

16.5 Tanaka 的随机微分方程

例 16.1 (Tanaka 方程) 考虑一维方程 $dX_t = \text{sgn}(X_t)dB_t$, $X_0 = 0$ 。

- 弱存在性: 设 X 是布朗运动, 令 $B = \int_0^\cdot \text{sgn}(X_s)dB_s$; $\langle B \rangle_t = t$, 由 Lévy 定理 B 是布朗运动, 且 $\int \text{sgn}(X)dB = \int \text{sgn}(X)^2 dX = X$ 。
- 依分布唯一性: 任何解满足 $\langle X \rangle_t = \int_0^t \text{sgn}(X_s)^2 ds = t$, 由 Lévy 定理 X 是布朗运动。
- 路径唯一性不成立: 若 X 是解, 则 $-X$ 也是: $\int_0^t \text{sgn}(-X_s)dB_s = -\int_0^t \text{sgn}(X_s)dB_s + 2\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}}dB_s$, 而最后一项的二次变差 $4\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}}ds = 0$ (占位时公式)。
- 不存在强解: 由 Tanaka 公式, $B_t = \int_0^t \text{sgn}(X_s)dB_s = |X_t| - L_t^0$, 而由推论 16.6, L^0 是 $|X|$ 的可测泛函。故 $\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t^{|X|}$ (完备化)。若 X 关于 $(\mathcal{F}_t^B)$ 适应, 则 $X_t = \phi(|X_s|_{s \leq t})$ a.s. (Doob-Dynkin)。但 $-X$ 与 X 同分布且 $|-X| = |X|$, 故 $(-X_t, |X|) \stackrel{(d)}{=} (X_t, |X|)$, 从而也有 $-X_t = \phi(|X_s|_{s \leq t})$ a.s., 于是 $X_t = 0$ a.s., 矛盾。

这个例子说明 Yamada-Watanabe 型的条件 (定理 15.7) 对路径唯一性是必要的: 系数 sgn 不连续。

文献说明

讲义的主线依据下列三本书: Le Gall GTM 295 [12] (第 2–7 章, 以及第 9 章的一部分); Kemeny–Snell–Knapp GTM 40 [10] (第 7、8 章: 状态分类、位势理论、吸收链与基本矩阵、 h -过程、Martin 边界、马尔可夫随机场); Le Gall GTM 274 [11] (第 9–16 章)。第 1–4 章的测度论部分另参考了 Capiński–Kopp [2]。

此外, 个别证明参考了以下文献, 特此注明:

- 强大数定律的截断证明 (定理 4.6) 取自 Etemadi [6], 其叙述参照 Durrett [4]; Kolmogorov 扩张定理 (定理 3.11) 与 Ulam 定理 (定理 1.15) 的证明参照 Kallenberg [8] 与 Billingsley [1]; 离散鞅部分也参考了 Williams [18]。
- 马氏链的耦合论证 (定理 7.22) 参照 Norris [16]。
- Martin 边界的收敛定理 (定理 8.11) 采用时间反转与上穿不等式的论证, 参照 Dynkin [5] 与 Woess [19]; 定理 8.13–8.16 中 h -过程的用法也参照 Woess [19]。
- BDG 不等式 (定理 12.18) 中 $p < 2$ 的情形用 Lenglart 控制不等式 [13], 参照 Revuz–Yor [17]; Novikov 判别法 (定理 12.24) 的证明 (经由 $\mathcal{E}(aL)$ 的 Kazamaki 型论证) 亦参照 [17] 与 [11]。
- 随机游走的 Hewitt–Savage 0-1 律、Chung–Fuchs 定理与三级数定理参照 Durrett [4]; 鞅中心极限定理的证明 (条件特征函数之积) 参照 Hall–Heyde [7]。
- 可逆链与电网络一节 (Dirichlet 原理、Rayleigh 单调性、树上的流判别法) 参照 Doyle–Snell [3] 与 Lyons–Peres [14]; 齐次树的 Martin 边界参照 Woess [19]。
- 布朗运动的重对数律、Lévy 连续模、处处不可微性与 Skorokhod 嵌入/Donsker 定理参照 Mörters–Peres [15] 与 Durrett [4]; Spitzer 定理、Feller 分支扩散、反正弦律与 Tanaka 方程参照 Le Gall [11] 及其习题。
- Yamada–Watanabe 路径唯一性定理 (定理 15.7) 参照原文 [20] 与 Karatzas–Shreve [9]。

参考文献

- [1] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [2] Marek Capiński and Ekkehard Kopp. *Measure, Integral and Probability*. 2nd ed. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, London, 2004.
- [3] Peter G. Doyle and J. Laurie Snell. *Random Walks and Electric Networks*. Vol. 22. Carus Mathematical Monographs. Mathematical Association of America, 1984.
- [4] Rick Durrett. *Probability: Theory and Examples*. 5th ed. Cambridge University Press, 2019.
- [5] Eugene B. Dynkin. “Boundary theory of Markov processes (the discrete case)”. In: *Russian Mathematical Surveys* 24.2 (1969), pp. 1–42.
- [6] Nasrollah Etemadi. “An elementary proof of the strong law of large numbers”. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 55 (1981), pp. 119–122.
- [7] Peter Hall and Christopher C. Heyde. *Martingale Limit Theory and Its Application*. Academic Press, New York, 1980.
- [8] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [9] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed. Vol. 113. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] John G. Kemeny, J. Laurie Snell, and Anthony W. Knapp. *Denumerable Markov Chains. With a Chapter of Markov Random Fields by David Griffeath*. 2nd ed. Vol. 40. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [11] Jean-François Le Gall. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Vol. 274. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2016.
- [12] Jean-François Le Gall. *Measure Theory, Probability, and Stochastic Processes*. Vol. 295. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2022.
- [13] Erik Lengart. “Relation de domination entre deux processus”. In: *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Section B* 13.2 (1977), pp. 171–179.
- [14] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press, 2016.
- [15] Peter Mörters and Yuval Peres. *Brownian Motion*. Cambridge University Press, 2010.
- [16] James R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge University Press, 1997.
- [17] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3rd ed. Vol. 293. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [18] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.
- [19] Wolfgang Woess. *Denumerable Markov Chains: Generating Functions, Boundary Theory, Random Walks on Trees*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society, Zürich, 2009.
- [20] Toshio Yamada and Shinzo Watanabe. “On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations”. In: *Journal of Mathematics of Kyoto University* 11 (1971), pp. 155–167.